Trojúhelníkové nerovnosti

Filip Hlásek

Abstrakt. V příspěvku si ukážeme několik pozoruhodných nerovností ze světa trojúhelníků. Jejich důkaz je často trikový nebo používá hlubší znalost tématu, takže úloh bude málo, ale o to vydatnějších.

Geometrické nerovnosti je souhrnný název pro úlohy, ve kterých se dokazuje platnost nerovnosti mezi geometrickými veličinami (obvykle se jedná o délky úseček nebo velikosti úhlů). Při jejich dokazování je potřeba chytře skloubit znalosti z oblasti algebraických nerovností s poznatky z planimetrie. Proto patří tato problematika mezi nejnáročnější partie elementární matematiky. Přesto se občas úlohy tohoto typu vyskytují ve středoškolských soutěžích, a proto si jich zkusíme několik vyřešit.

Úloha. Mějme trojúhelník ABC, délky jeho stran označme a, b, c, velikosti odpovídajících úhlů α, β, γ a poloměr jeho kružnice opsané r. Dále $2s = a + b + c$ a S je jeho obsah. Navíc bod P je libovolný bod uvnitř trojúhelníku a d_1, d_2, d_3 jeho vzdálenosti od jednotlivých stran. Dokažte, že potom platí následující nerovnosti:

(1) (Trojúhelníková) $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$,

(2) $3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$,

(3) $8(s - a)(s - b)(s - c) \le abc$,

(4) $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \le 48(s - a)(s - b)(s - c)$,

(5) $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \ge 3$,

(6) $3a^2 + 3b^2 - c^2 \ge 4\sqrt{3}S$,

(7) (Weitzenböck) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$,

(8) (Finsler-Hadwiger) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$,

(9) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4}$,

(10) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \ge \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$,

(11) (Odo) $27(b^2 + c^2 - a^2)^2(c^2 + a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 \le (4S)^6$, ABC ostroúhlý,

(12) (Erdös-Mordell) $2(d_1 + d_2 + d_3) \le |PA| + |PB| + |PC|$,

(13) (Schreiber) $d_1 + d_2 + d_3 \ge 6r$,

(14) (Neuberg-Pedoe) $A^2(-a^2+b^2+c^2)+B^2(a^2-b^2+c^2)+C^2(a^2+b^2-c^2) \ge 16ST$, kde A, B, C jsou délky stran nějakého trojúhelníku s obsahem T.