Geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka

Libor Barto

Vybrané poznatky z geometrie trojúhelníka

Definice. (Dělící poměr) *Nechť A, B, C jsou tři různé body ležící na jedné přímce. Definujeme $(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}$, neleží-li C mezi A, B a $(ABC) = -\frac{|AC|}{|BC|}$, leží-li C mezi A, B.*

Značení. A, B, C jsou vrcholy trojúhelníka, a, b, c délky protilehlých stran, α, β, γ velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, r, resp. R poloměr vepsané, resp. opsané kružnice.

Věta. (Sinová) $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r.$

Věta. (Kosinová) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$

Věta. (Tangentová) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\mathrm{tg}(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\mathrm{tg}(\frac{\alpha-\beta}{2})}.$

Věta. (Menelaova) *Nechť X, Y, Z jsou libovolné body ležící na přímkách BC, AC, AB (v tomto pořadí), které nesplývají s vrcholy trojúhelníka. Potom body X, Y, Z leží na přímce právě tehdy, když $(BCX)(CAY)(ABZ) = 1$.*

Věta. (Cévova) *Nechť X, Y, Z jsou libovolné body ležící na přímkách BC, AC, AB (v tomto pořadí), které nesplývají s vrcholy trojúhelníka. Pak přímky AX, BY, CZ procházejí týmž bodem nebo jsou rovnoběžné právě tehdy, když $(BCX)(CAY)(ABZ) = -1$.*

Věta. (Van Aubelova) *Nechť X, Y, Z jsou libovolné body ležící na přímkách BC, AC, AB (v tomto pořadí), které nesplývají s vrcholy trojúhelníku. Nechť se přímky AX, AY, AZ protínají v bodě P. Pak $(AXP) = (ACY) + (ABZ)$.*

Vybrané poznatky z geometrie čtyřúhelníka

Značení. A, B, C, D jsou vrcholy čtyřúhelníka, a, b, c, d délky stran pořadě AB, BC, CD, DA, e, f délky úhlopříček, P obsah, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Definice. (Tětitový a tečnový čtyřúhelník) *Čtyřúhelník nazýváme tětivový, lze-li mu opsat kružnice, čtyřúhelník nazýváme tečnový, lze-li mu vepsat kružnice. čtyřúhelník nazýváme dvojstředový, je-li tečnový i tětivový.*

Věta. (Bretschneiderova, kosinová věta pro čtyřúhelník) *Nechť čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, pak $e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma)$.*

Věta. (Ptolemaiova) *$ef \leq ac + bd$. Rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.*

Věta. (Brahmaguptův vzorec) *$P \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník. Pro dvojstředový čtyřúhelník navíc platí $P = \sqrt{abcd}$.*