Trojpoměr v geometrii

Anša Lauschmannová

Co to ten trojpoměr vlastně je?

Definice. Trojpoměrem[6] *bodu C přímky AB vzhledem k bodům A, B nazýváme číslo (ABC) definované takto:*

(i) *leží-li C na úsečce AB, je $(ABC) = -\frac{|AC|}{|BC|}$*

(ii) *leží-li C mimo úsečku AB, je $(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}$.*

Pro pevná A a B je každému bodu $X \neq B$ na přímce AB přiřazeno číslo (ABX). Naopak, každému reálnému číslu $\lambda \neq 1$ je jednoznačně přiřazen bod X na přímce AB.

Úloha. Trojpoměr je vlastnost uspořádaných trojic.

(a) Nakreslete trojici bodů na přímce takových, že $(ABC) = \frac{3}{2}$ a určete trojpoměry (BAC), (ACB), (CAB), (BCA), (CBA).

(b) Určete hodnoty zbývajících pěti trojpoměrů pro trojici bodů A, B, C takových, že $(ABC) = \lambda$. Dokažte, že pro každou uspořádanou trojici různých bodů X, Y, Z téže přímky platí

$$(XYZ) \cdot (YXZ) = 1$$

$$(XYZ) + (XZY) = 1$$

Úloha. Charakterizujte případ, kdy pro trojpoměr platí $(ABC) < 0$.

Úloha. Zvolte přímku AB za číselnou osu s body $A\,[0]\,, B\,[1]\,, X\,[x]$. Načrtněte graf funkce $y = (ABX)$.

Úloha. Nechť jsou dány body A, B a číslo $\lambda \neq 1$. Zvolme libovolnou přímku $AJ \neq AB$ procházející bodem A a považujme ji za číselnou osu, kde bod J odpovídá 1. Nechť K je čtvrtý vrchol rovnoběžníku $JABK$. Označme X průsečík přímky AB s přímkou KL, kde L je bod přímky AJ se souřadnicí λ. Ukažte, že bez ohledu na volbu bodu J je $(ABX) = \lambda$.

Úloha. Zkonstruujte pomocí pravítka a kružítka bod X na přímce AB tak, aby platilo

(a) $(ABX) = \sqrt{3}$

(b) $(ABX) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

[6] Místo trojpoměr se častěji říká *dělicí poměr*, ale trojpoměr je kratší a líbí se mi víc.

(c) $(ABX) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $(BAX) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Tvrzení. (Zachování trojpoměru při promítání.) Trojpoměr každé uspořádané trojice různých bodů přímky se zachovává při rovnoběžném promítání této přímky na kteroukoli jinou přímku a při středovém promítání přímky na přímku s ní rovnoběžnou.

Úloha. Nakreslete dvě úsečky AB, XY ležící

(a) na rovnoběžných přímkách

(b) na různoběžných přímkách. Zvolte bod C na přímce AB a přiřaďte mu bod Z přímky XY tak, aby $(ABC) = (XYZ)$.

K čemu ten trojpoměr vlastně je?

Mějme trojúhelník ABC a tři body A', B', C' na přímkách $a = BC, b = AC, c = AB$, které nesplývají s vrcholy A, B, C. Platí následující tři věty:

Věta. (Menelaova) *Body A', B', C' leží na jedné přímce právě tehdy, když platí $(BCA')(CAB')(ABC') = 1$.*

Věta. (Cevova) *Přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem nebo jsou rovnoběžné právě tehdy, když $(BCA')(CAB')(ABC') = -1$.*

Věta. (Van Aubelova) *Nechť se přímky AA', BB', CC' protínají v bodě P. Pak platí $(AA'P) = (ACB') + (ABC')$.*

Cevova věta má nejvíc jednoduchých důsledků. Určitě Tě už někdy napadlo, že je divné, že těžnice, výšky i osy úhlů se vždycky protnou v jediném bodě. S pomocí Cevovy věty se to dá snadno dokázat.

Jak lze sčítat body?

Definice. Vektor v prostoru *si budeme představovat jako šipku, která má daný směr a velikost, ale můžeme pro ni zvolit libovolný počáteční bod. Je-li dána nějaká soustava souřadnic, umístíme počátek šipky do počátku souřadnic. Koncové body šipky potom určují* souřadnice vektoru. *Můžeme tedy psát* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Důležité je, že vektory umíme sčítat. Pomocí souřadnic se to udělá snadno, prostě sečteme jednotlivé složky, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.[7] Nakreslíme-li šipku $\boldsymbol{v}$ tak, že začíná v koncovém bodě šipky $\boldsymbol{u}$, je $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ šipka z počátečního bodu $\boldsymbol{u}$ do koncového bodu $\boldsymbol{v}$.

[7] Místo součet vektorů často také říkáme *lineární kombinace.*

Vektory umíme také násobit reálným číslem[8] – prostě tím číslem vynásobíme jeho délku a zachováme jeho směr. V souřadnicích platí, že $\lambda \cdot \mathbf{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$.

Všimněte si, že výraz $[x_1, x_2, x_3]$ označuje souřadnice bodu X, zatímco výraz (x_1, x_2, x_3) značí souřadnice vektoru $\mathbf{x}$.[9]

Příklad. (Operace s body) Střed S úsečky AB má souřadnice $s_i = \frac{a_i+b_i}{2}$, kde $i = 1, 2, 3$, čili $S = \frac{A+B}{2}$. Toto je speciální případ následujícího tvrzení při volbě $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Soustava rovnic

$$X = \alpha A + \beta B$$

$$\alpha + \beta = 1,$$

(první rovnice je stručným zápisem tří rovností v souřadnicích), určuje přímku AB. Podobně platí, že bod X leží v rovině určené body A, B a C právě tehdy, když existují čísla α, β, γ taková, že

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Tvrzení. (Zadání bodu jako součtu bodů) Zvolme si body A_i a čísla α_i, kde $i = 1, \ldots k$. Bod definovaný rovností

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1.$$

V případě, že pro všechna α_i platí $0 \leq \alpha_i \leq 1$, mluvíme o konvexní kombinaci bodů. Zkus si rozmyslet, že všechny konvexní kombinace dvou bodů A a B tvoří úsečku AB a všechny konvexní kombinace tří bodů A, B a C tvoří (vyplněný) trojúhelník ABC. Množině všech konvexních kombinací bodů A_i říkáme *konvexní obal* těchto bodů; je to nejmenší konvexní útvar, který všechny tyto body obsahuje, tedy útvar obsahující všechny body, které leží „mezi“ zadanými body A_i.

Sčítání bodů lze velmi výhodně využít k hledání těžišť různých objektů. Ukážeme si to na dvou jednoduchých příkladech:

[8] V tomto kontextu se číslům často říká *skaláry.*

[9] V matematické hatmatilce se prostorům, ve kterých existují jak body, tak vektory, říká *afinní prostory.*

Věta. (O těžišti trojúhelníka) *Těžnice trojúhelníka ABC se protínají v jednom bodě T, kterému říkáme těžiště. To dělí každou těžnici v poměru $2:1$ (počítáno od vrcholu k jeho protější straně). Platí*

$$T = \frac{A+B+C}{3}.$$

Věta. (O těžišti čtyřstěnu) *Těžnice čtyřstěnu $ABCD$ se protínají v jediném bodě T, kterému říkáme těžiště. Toto těžiště dělí každou těžnici v poměru $3:1$ (počítáno od vrcholu k protější stěně). Platí*

$$T = \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Těžiště je středem každé úsečky, jejímiž krajními body jsou středy dvou protilehlých hran čtyřstěnu.

Příklad. (Další operace s body) Vektor z bodu A do bodu B má souřadnice $v_i = b_i - a_i$, čili $\boldsymbol{AB} = B - A$. Při volbě $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ to je speciálním případem následujícího tvrzení.

Tvrzení. (Zadání vektoru jako součtu bodů.) Nechť A_i jsou body a α_i jsou čísla. Vektor definovaný rovností

$$\mathbf{v} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 0.$$

Úloha. Je dán trojúhelník ABC. Zapište půlicí bod C^* těžnice t_C jako lineární kombinaci bodů A, B a C.

Úloha. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Napište rovnici těžnice t_A.

Vektorový pohled na trojpoměr

Tvrzení. (Rovnice bodu s daným trojpoměrem.) Nechť jsou dány body A a B a číslo $\lambda \neq 1$. Potom existuje právě jeden bod C takový, že platí $(ABC) = \lambda$. Lze jej zapsat ve tvaru

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B.$$

Věta. (O průsečíku výšek) *Výšky trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě V. Je-li navíc O střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku, platí*

$$V = O + (A - O) + (B - O) + (C - O).$$

Věta. (O Eulerově přímce) *Nechť T je těžiště trojúhelníka ABC, V a O jako v předešlé větě. Pak body O, T a V leží na jedné přímce a platí, že $|OT| : |TV| = 1 : 2$; jinými slovy, $|(OVT)| = \frac{1}{2}$.*

Literatura

První a druhá část vycházejí z poznámek *Libora Barta* na téma Geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka. Pokud Tě zaujala část třetí, doporučuji Tvé pozornosti přednášku *Martina Fraase* věnovanou *barycentru*; oba textíky najdeš v knihovně na našich stránkách.