Triky s polynómami

Miško Szabados

ABSTRAKT. Vezmeme to úplne od základov – povieme si, ako sa na polynómy pozerať, čo si všímať a ako pristupovať k príkladom s nimi. V druhej časti sa dostaneme k pokročilejším fintám a kritériám rozložiteľnosti polynómov.

Definícia. Polynóm *je výraz tvaru* $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. *Čísla* a_i *sú koeficienty polynómu a* x *je premenná. Spolu s polynómom musíme povedať, čo môžu byť koeficienty. Typicky sú to celé čísla* $\mathbb{Z}$, *racionálne čísla* $\mathbb{Q}$ *alebo reálne čísla* $\mathbb{R}$.

Typický stredoškolský polynóm má reálne koeficienty a vnímame ho ako funkciu z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$: $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Často sa však bude hodiť aj čisto algebraický pohľad – vnímať polynóm ako obyčajný výraz. Musím však povedať, že niekedy je rozdiel medzi polynóm ako funkciou a polynómom ako výrazom. (Povieme si na prednáške.)

Definícia. Koreň *polynómu* $p(x)$ *je také číslo* k *z daného definičného oboru, pre ktoré platí* $p(k) = 0$.

Pre polynómy máme prirodzene definované delenie so zvyškom, ktoré sa učí aj na strednej škole. Ukážeme si, že polynómy dokážeme (síce nie úplne vždy) rozdeliť na súčiny činiteľov tvaru $(x - k_i)$, kde k_i budú korene polynómu. Práve pre tento tvar nám bude užitočné skúmať deliteľnosť.

Ak má polynóm koeficienty iba z danej množiny M, hovoríme, že je „nad M“. Odteraz budeme uvažovať iba polynómy nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ alebo $\mathbb{C}$.

Vlastnosti

Vetička 1. *Ak je* k *koreň* $p(x)$, *tak* $(x - k) \mid p(x)$.

Vetička 2. *Ak má polynóm stupňa* n *aspoň* $n + 1$ *koreňov, tak už je to nutne nulový polynóm.*

Vetička 3. *Polynóm stupňa* n *je určený hodnotami v* $n + 1$ *bodoch.*

Vetička 4. *Polynóm* $ax^2 + bx + c$ *má korene*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vetička 5. *Ak* a, b *a koeficienty* $p(x)$ *sú celé čísla, tak* $a - b \mid p(a) - p(b)$.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ. polynómy, triky, kritéria ireducibility

Vetička 6. *Ak má polynóm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficientami racionálny koreň $q = \frac{r}{s}$ (r, s nesúdeliteľné), tak $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$.*

Vetička 7. *Vietove vzťahy: Ak je $a_n = 1$, tak pre koeficienty polynómu platí:*

$$a_i = (-1)^{n-i} \sum_{j_1 < \cdots < j_i} k_{j_1} \cdots k_{j_i} \qquad j_i \in \{1, \cdots, n\}$$

kde $k_1, \ldots, k_n$ sú korene polynómu. Špeciálne

$$a_0 = (-1)^n k_1 \cdots k_n$$

$$-a_{n-1} = k_1 + \cdots + k_n$$

Príklady

Príklad 1. Dokážte, že ak P je polynóm s celočíselnými koeficientmi a a, b, c rôzne celé čísla, tak sa nemôže stať, aby $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.

Príklad 2. Zjednodušte:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$$

Príklad 3. Nech a, b, c sú reálne čísla také, že

$$\begin{aligned} a + b + c &> 0, \\ ab + ac + bc &> 0, \\ abc &> 0. \end{aligned}$$

Dokážte, že potom $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Príklad 4. Polynóm $x^3 - 3x + 1$ má tri reálne korene, ktoré označíme α, β, γ. Napíšte polynóm tretieho stupňa, ktorého korene sú čísla $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$.

Príklad 5. Majme p, q reálné polynómy, $p \neq 0$. Dokážte, že existuje polynóm r s reálnymi koeficientmi taký, že $p(x) \mid r(q(x))$.

Príklad 6. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa nanajvýš 6 nad $\mathbb{Z}$ taký, že $7 \mid P(x)$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$. Ukážte, že potom 7 delí všetky koeficienty $P(x)$.

Triky s polynómami

Príklad 7. a, b, c sú korene polynómu x^3-5x^2+3. Koľko je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$? A koľko $a^4+b^4+c^4$?

Príklad 8. Zistite súčet koeficientov polynómu

$$P(x)=(1-2x^2-3x^3+4x^4+5x^5-6x^6-7x^7+8x^8+9x^9-10x^{10})^{2009}.$$

Príklad 9. Dokážte, že $\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ je celé číslo.

Príklad 10. Pepa má a, b, c celé čísla také, že

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=u, \qquad \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=v$$

pre $u, v \in \mathbb{Z}$. Dokážte, že všetky a, b aj c majú rovnakú absolútnu hodnotu.

Príklad 11. Má polynóm $x^{10}+x^9+\cdots+x+1$ reálne korene?

Príklad 12. Nájdi všetky reálne korene $x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32$.

Príklad 13. Nájdi všetky korene $30x^3-31x^2+10x-1$.

Príklad 14. Nájdi všetky korene $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

Kritériá ireducibility

Ako sme videli, často potrebujeme vedieť, aké má polynóm korene. Niekedy, najmä keď hľadáme celočíslené korene, však polynóm vôbec žiadne nemusí mať. Aby sme to zistili, stačí nám vedieť, že sa polynóm nedá rozložiť na súčin dvoch polynómov napr. s celočíselnými koeficientami – tj. že je nerozložiteľný (ireducibilný).

Veta. (Eisensteinovo kritérium) *Majme polynóm $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ a prvočíslo p také, že*

(i) $p \mid a_i \quad i=0,1,\ldots,n-1$,
(ii) $p \nmid a_n$,
(iii) $p^2 \nmid a_0$.

Potom $f(x)$ je ireducibilný nad $\mathbb{Q}$.

Veta. (Cohnovo kritérium) *Ak $\overline{a_n\cdots a_1a_0}$ je prvočíslo zapísané v desiatkovej sústave, tak polynóm $a_nx^n+\cdots+a_0$ je ireducibilný nad $\mathbb{Z}$.*

Príklad 15. Dá sa polynóm $2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ rozložiť nad $\mathbb{Z}_0^+$? A čo polynóm $6x^4+x^3+3x+1$?

Príklad 16. Ukážte, že polynóm $3x^4+15x^2+10$ sa nedá rozložiť nad $\mathbb{Z}$.

Príklad 17. Ukážte pomocou Eisensteinovho kritéria, že sa polynóm $x^2 + x + 2$ nedá rozložiť nad $\mathbb{Z}$. Použite substitúciu $x = y + a$ pre vhodne zvolené a.

Literatura

[1] Saša Kazda: *Polynomy*, Sborníček Rapotín, 2007.
[2] Michal Rušin: *Základní vlastnosti polynomů*, Sborníček Ramzová, 2006.