Topologie

Jakub Opršal

Obecná topologie je jedna z obecnějších matematických disciplín. Co se historie týče, tak vznikla postupným zobecňováním z matematické analýzy reálných čísel přes metrické prostory. Přístup, o který se pokusím na této přednášce bude trochu netradiční, neboť půjdu od lesa a tedy začnu od obecnějších principů.

Definice. *Mějme prostor X,* (topologickým) uzávěrem *rozumíme operaci $\overline{}$, která každé pomnožině $A \subseteq X$ přiřádí její uzávěr $\overline{A} \subseteq X$, která splňuje:*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$
(ii) $A \subseteq \overline{A}$
(iii) $\overline{A} \subseteq \overline{(\overline{A})}$
(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Prostoru X pak říkáme Topologický prostor.

Topologický uzávěr množiny A lze intuitivně chápat jao množinu všech bodů, které mají k A „blízko“. První axiom pak říká „k prázdné množině nemá žádný bod blízko“, druhý, že „všechny body A mají k množině A blízko“. Třetí pak „body, co mají blízko k bodům, co jsou blízko A, jsou blízko k A“ – tento axiom je asi nejmíň intuitivní, ale pokud ho vynecháme dostaneme něco jiného než topologický prostor. Poslední pak „body, co mají blízko k $A \cup B$ mají blízko buď k A, nebo k B“.

Definice. *Množinu $A \subseteq X$ nazveme* uzavřenou, *je-li shodná se svým uzávěřem. Tj. $A = \overline{A}$. Množinu A nazveme* otevřenou, *je-li dopňkem uzavřené, tj. $X \setminus A = \overline{X \setminus A}$.*

Lemma. *Platí $B = \overline{A}$ právě když B je průnik všech uzavřených množin obsahujících A.*

Věta. *Je-li X prostor a A, B uzavřené množiny pak*

(i) *$\emptyset$ a X jsou uzavřené*
(ii) *$A \cup B$ je uzavřená*
(iii) *Jsou-li A_i uzavřené množiny pro $i \in \kappa$, pak $\bigcap_{i \in \kappa} A_i$ je uzavřená.*

Obdobná věta platí i pro otevřené množiny. Vlastně ve skutečnosti je tato věta definice topologického prostoru, takže abyste si rozumněli s ostatními matematiky uvedu ještě jednu definici:

Definice. (Obvyklá definice topologického prostoru) Topologickým prostorem *Rozumíme prostor X a systém $\mathcal{T}$ některých podmnožin X, že splňuje:*

(i) *$\emptyset \in \mathcal{T}$ a $X \in \mathcal{T}$*

(ii) $A, B \in \mathcal{T} \to A \cap B \in \mathcal{T}$

(iii) *Jsou-li* $A_i \in \mathcal{T}$ *pro* $i \in \kappa$, *pak* $\bigcup_{i\in\kappa} A_i \in \mathcal{T}$.

Množinám z $\mathcal{T}$ *pak říkáme* otevřené množiny.

Lemma. *Množina* $A \subseteq X$ *je otevřená právě když pro každý její bod* x *existuje otevřená množina* U_x, *že* $x \in U_x \subseteq A$.

Příklad. (Diskrétní prostor) Uvažme uzávěr $\overline{A} = A$ pro každou podmnožinu X, kde X je tedy libovolná množina. Pak všechny množiny jsou uzavřené a všechny množiny jsou otevřené. A z intuitivního popisu máme každý bod je od libovolné množiny „daleko“ (pokud není v ní). Tomuto prostoru se říká diskrétní, neboť sestává s oddělených (tzv. izolovaných) bodů.

Příklad. (Indiskrétní prostor) Naopak, je-li $\overline{A} = X$ pro každou podmnožinu X, pak intuitivně všechny body mají k libovolné množině „blízko“, uzavřené a otevřené množiny jsou pouze dvě a to $\emptyset$ a X.

Příklad. (Sierpinského prostor) Další příklad je jeden z „divnějších“ prostorů. Množina X je dvouprvková $\{a, b\}$, přitom definujeme uzávěr $\overline{\{a\}} = \{a\}$ a $\overline{\{b\}} = \{a, b\}$. Ostatní hodnoty máme jasné. Z intuitivního hlediska pak bod a má „blízko“ k bodu b, ale bod b nemá blízko k bodu a.

Ještě si povíme o tom, co je to spojité zobrazení. Intuitivně asi spojitou funkci v reálných číslech chápeš jako „čáru, která se dá nakreslit jedním tahem“. Bohužel ani tato intuitivní představa nám nepomůže v pochopení toho, co je spojitá funkce. Mnohem přesnější je „zobrazuje body, co jsou blízko, na body, co jsou blízko“. Jak by to ale vypadalo formálně? S trochou představivosti snad:

Definice. *Jsou-li* X, Y *dva topologické prostory a* $f\colon X \to Y$ *zobrazení. Řekneme, že* f *je spojité pokud pro každou* $A \subseteq X$ *platí:*

$$f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]}$$

Abychom zabránili takovým zvláštním případům, jako jsou poslední dva příklady (Sierpinského a indiskrétní prostor), tak se zavádějí různé oddělovací axiomy. Z nich uvedu jen dva (těch nejběžnějších je pět a značí se $T_0, T_1, \ldots, T_4$, většina z nich má ještě rozumnější jména, krom těchto jsou ještě některé „mezi“ a to KC a $T_{3\frac{1}{2}}$).

Definice. (T_1 prostor) *Prostor je* T_1 *je-li každá jednoprvková podmnožina uzavřená.*

Tvrzení. Každý konečný T_1 prostor je diskrétní.

Tedy zajímavé jsou právě nekonečné prostory z nich zkusím uvést a vysvětlit (jestli se k tomu na přednášce dostaneme) jeden příklad, který má velký význam v Topologii a který je také velmi dobře známý i tak.

Definice. (Cantorovo diskontinuum) *Nosná množina Cantorova diskontinua C je $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (množina všech nekonečných posloupností nul a jedniček). Topologii na tomto prostoru popíšeme otevřenými množinami. Otevřené jsou prvně množiny všech poslopností, které se na daných konečně mnoha pozicích shodují s danou posloupností (máme-li $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n} \in \{0,1\}$, pak do otevřené množiny U patří všechny posloupnosti, které mají na pozici i_j hodnotu σ_{i_j} pro každé j. A dále jsou otevřené všechny sjednocení takových množin.*

Definice. (T_2 aneb Hausdorffův prostor) *Prostor nazveme T_2 neboli Hausdorffův pokud pro každé dva body x, y existuje otevřená množina U, že $x \in U$ a $y \notin \overline{U}$.*