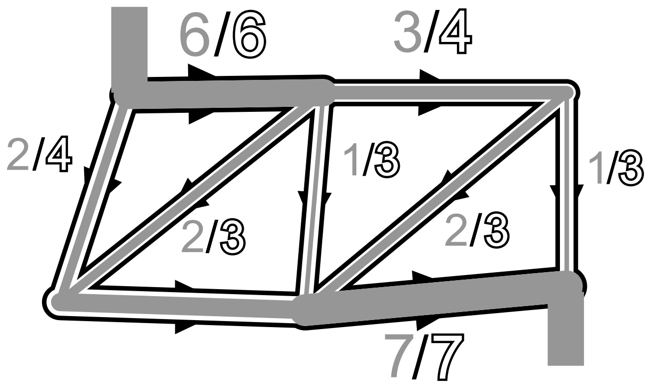
Toky v sítích

Mirek Olšák

Abstrakt. Zavedeme pojem toku v síti, dokážeme základní větu o tocích a ukážeme její aplikace na úlohy.

Intuitivní pohled na toky v síti

Síť je (orientované) potrubí s různými kapacitami trubek, které má přívod (říkáme mu zdroj) a odvod (říkáme mu stok). Tok pak je situace, když tímto potrubím někudy pustíme vodu od zdroje do stoku a velikost toku říká, kolik vody tímto tokem protéká. Například velikost následujícího toku je 8.



Grafový pohled na toky v síti

Síť je orientovaný graf s hranami ohodnocenými kladnými celými (resp. reálnými) čísly se dvěma speciálně označenými vrcholy jako zdroj a stok.

Tok je podgraf sítě, opět spolu s ohodnocením hran takovým, že každá hrana má nejvýše takovou hodnotu, jakou má příslušná hrana v síti. Navíc v toku musí platit, že pro každý vrchol různý od zdroje a stoku je součet hodnot hran vedoucí do tohoto vrcholu stejný jako součet hodnot hran vedoucích z něj. Pro zdroj musí být vyšší součet hodnot hran vedoucích ze zdroje než do zdroje a jejich rozdíl nazýváme velikost toku.

Řez je množina hran, po jejímž odebrání neexistuje cesta ze zdroje do stoku a velikostí řezu myslíme součet kapacit odebraných hran.

Intervalový pohled na toky v síti

Síť je množina vrcholů, přičemž dva jsou vyznačené (zdroj a stok). Dále pro každou uspořádanou dvojici vrcholů x, y máme uzavřený interval kapacit $\langle a_{xy}, b_{xy}\rangle$, přičemž v každém takovém intervalu leží nula a $\langle a_{xy}, b_{xy}\rangle = \langle -b_{yx}, -a_{yx}\rangle$.

Tok je sada c_{xy} celých (reálných) čísel taková, že pro každou uspořádanou dvojici x, y vrcholů platí:

(i) $c_{xy} \in \langle a_{xy}, b_{xy}\rangle$,
(ii) $c_{xy} = -c_{yx}$,
(iii) Pro x různé od zdroje i stoku je součet hodnot přes všechny vrcholy $y \neq x$ hodnot c_{xy} roven nule,
(iv) Součet hodnot c_{zy}, kde z je zdroj a y probíhá všechny vrcholy je kladný a nazýváme jej velikostí toku.

Řez je rozdělení množiny vrcholů na dvě podmnožiny X, Y takové, že zdroj leží v X a stok leží v Y. Velikostí řezu rozumíme součet všech b_{xy}, kde $x \in X$, $y \in Y$.

Věta. (základní o tocích) *V každé síti je největší možná velikost toku rovna nejmenší možné velikosti řezu. Navíc, má-li síť celočíselné kapacity, pak existuje tok maximální možné velikosti, který má opět všechny hodnoty celočíselné.*

Úlohy

Úloha 1. Je dána obdélníková tabulka reálných čísel taková, že součet každého řádku i sloupce je celočíselný. Dokažte, že je možné každé číslo v tabulce nahradit jeho dolní nebo horní celou částí tak, aby hodnoty čísel zůstaly nezměněny.

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 2. V tabulce $n \times n$ jsou v políčkách nezáporná celá čísla a v každém řádku i sloupci je stejný kladný součet. Dokažte, že je možné postavit n šachových věží na nenulová políčka, aby se vzájemně neohrožovaly.

Úloha 3. (Hallova věta) Máme takový systém množin, že kdykoli sjednotíme několik z nich, bude sjednocení vždy obsahovat alespoň tolik prvků, kolik množin jsme sjednotili. Dokažte, že je možné v každé množině zakroužkovat jeden prvek tak, aby zakroužkované prvky byly navzájem různé.

Úloha 4. Řekneme, že graf je hranově k-souvislý, když je souvislý a zůstane souvislý i po odebrání libovolných $k-1$ nebo méně hran. Dokažte, že je graf hranově k-souvislý právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy vede alespoň k hranově disjunktních cest.

Úloha 5. Řekneme, že graf je vrcholově k-souvislý, když má alespoň $k+1$ vrcholů, je souvislý a zůstane souvislý i po odebrání libovolných $k-1$ nebo méně vrcholů.

Dokažte, že je graf vrcholově k-souvislý právě tehdy, když mezi každýma dvěma vrcholy vede alespoň k cest vrcholově disjunktních až na počáteční a koncový vrchol.

Návody

1. BÚNO jsou v tabulce čísla mezi 0 a 1. Postavte síť s celočíselnými kapacitami tak, aby vyplnění tabulky byl jeho maximální tok a využijte skutečnosti, že je možné najít stejně velký celočíselný tok.

2. Přitéká kapacita 1 zleva na každém řádku, protéká tabulkou a odtéká kapacita 1 dolem v každém sloupci. Řezat políčka tabulky se nevyplatí – řežeme řádky a sloupce. Každým odříznutím se zbavíme nejvýše s políček v součtu, ale celkem má tabulka součet ns.

3. Kapacita 1 přitéká do jednotlivých množin, z každé množiny pak do jejích prvků a z každého prvku pak kapacita 1 do stoku.

4. Každá hrana má kapacitu 1, přímá aplikace základní věty o tocích.

5. Zdvojte graf a po každém protečení hranou donuťte vodu protéct vrcholem (všechny kapacity 1).