

The Big Picture

RADO VAN ŠVARC

ABSTRAKT. V příspěvku prozkoumáme konfiguraci určenou tětíivým čtyřúhelníkem zvanou The Big Picture.

Začneme několika základními definicemi, úmluvami a tvrzeními.

Úmluva. Kružnici opsanou trojúhelníku XYZ budeme značit jako (XYZ) .

Věta. (Miquelova) Pokud v trojúhelníku ABC zvolíme body X, Y, Z na přímkách BC, CA a AB , pak se kružnice $(YAZ), (ZBX)$ a (XCY) protínají v jednom bodě.

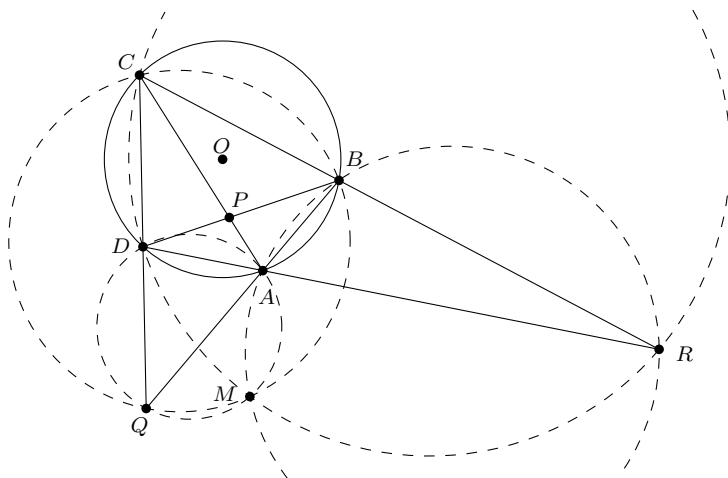
Tvrzení. Necht' ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 a ℓ_4 jsou čtyři přímky, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Necht' C_{ijk} je kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_i, ℓ_j a ℓ_k (říkáme jim *Miquelovy kružnice*). Pak se $C_{123}, C_{234}, C_{341}$ a C_{412} protínají v jednom bodě (zvaném *Miquelův*).

Tvrzení. Necht' A, B, C a D jsou čtyři body v rovině, které neleží na jedné přímce. Přímky AB a CD se protínají v bodě Q a přímky DA a CB se protínají v bodě R . Pak Miquelův bod určený přímkami AB, BC, CD a DA leží na přímce QR právě tehdy, když A, B, C a D leží na jedné kružnici.

Úmluva. Dále budeme *Vobrázkem* myslet následující konfiguraci:

Na kružnici se středem O leží čtyři různé body A, B, C a D . Přímky AC a BD se protínají v P , přímky AB a CD se protínají v Q a přímky AD a BC se protínají v R . Dále M je Miquelův bod určený přímkami AB, BC, CD a DA .

Vobrázku se též někdy říká *The Big Picture*. Pozor, neplést se stejnojmennou konfigurací pro trojúhelník propojující připsiště a Feuerbachovu kružnici. Až na sdílené jméno nemají pranic společného. Protože se ovšem pod tímto názvem obvykle myslí „ta druhá“, budeme v příspěvku i na přednášce používat termín *Vobrázek*.



Poznámka. Ve Vobrázku platí, že M leží na QR .

Lemma. Necht' W, X, Y a Z jsou čtyři body v rovině. Předpokládejme, že $W \neq X$ a $Y \neq Z$. Pak přímky WX a YZ jsou kolmé právě tehdy, když $|WY|^2 + |XZ|^2 = |WZ|^2 + |XY|^2$.

Tvrzení. Ve Vobrázku platí $OM \perp QR$.

Tvrzení. Ve Vobrázku prochází kružnice (AOC) a (BOC) bodem M .

Důsledek. Ve Vobrázku je přímka MO osou úhlů AMC a BMD .

Tvrzení. Ve Vobrázku leží body O, P a M na jedné přímce.

Spiralizace

Na začátek tohoto oddílu si zopakujeme pár základních tvrzení o spirální podobnosti.

Tvrzení. Necht' W, X, Y a Z jsou čtyři body v rovině takové, že se WY a XZ protínají v bodě P . Buď Q průsečík kružnic (WXP) a (PYZ) . Pak Q je střed spirální podobnosti přenášející W na Y a X na Z .

Tvrzení. („Spirální podobnost chodí po dvou“) Pokud Q je střed spirální podobnosti přenášející W na Y a X na Z , pak je to také střed spirální podobnosti přenášející W na X a Y na Z .

Nyní získáváme zcela nový pohled na Vobrázek:

Poznámka. Ve Vobrázku je M střed spirální podobnosti přenášející A na B a D na C . Stejně tak se jedná o střed spirální podobnosti přenášející A na D a B na C .

S tímto pozorováním si novým způsobem ukážeme již dokázané tvrzení.

Tvrzení. Ve Vobrázku platí $OM \perp QR$.

Polarizace

V tuto chvíli si zavedeme několik základních pojmů vázajících se k polárám.

Definice. *Kruhová inverze* je geometrické zobrazení určené kružnicí k se středem O a poloměrem r , které bodu A různému od O přiřadí bod A' na polopřímce OA takový, že $|OA| \cdot |OA'| = r^2$.

Tvrzení. *Uvažme kruhovou inverzi určenou kružnicí k se středem I . Pak*

- (i) *obrazem přímky procházející bodem I je ona sama,*
- (ii) *obrazem přímky neprocházející bodem I je kružnice procházející bodem I ,*
- (iii) *obrazem kružnice procházející bodem I je přímka neprocházející bodem I ,*
- (iv) *obrazem kružnice neprocházející bodem I je kružnice neprocházející bodem I .*

Definice. Nechť k je kružnice se středem O . Pokud máme bod $P \neq O$ a přímku ℓ kolmou na OP a procházející inverzem k P vzhledem ke k , pak říkáme, že P je *pól* přímky ℓ a přímka ℓ je *polára* bodu P .

Tvrzení. *Pokud X je pól poláry ℓ_1 a Y je pól poláry ℓ_2 , pak X leží na ℓ_2 právě tehdy, když Y leží na ℓ_1 .*

Důsledek. *Tři póly leží na přímce právě tehdy, když jejich poláry prochází jedním bodem.*

Definice. Nechť k je kružnice a XYZ trojúhelník. Řekneme, že vzhledem ke k je XYZ *selfpolar* (někdy taktéž přezdívaný *tripolární*, ale to je méně zažitý název), pokud X je pól YZ , Y je pól ZX a Z je pól XY .

K čemu nám tyto definice a tvrzení jsou? Přinášejí totiž ještě jednu důležitou vlastnost Vobrázku.

Tvrzení. *Ve Vobrázku je trojúhelník PQR tripolární.*

Důsledek. *Ve Vobrázku je O kolmiště trojúhelníku PQR .*

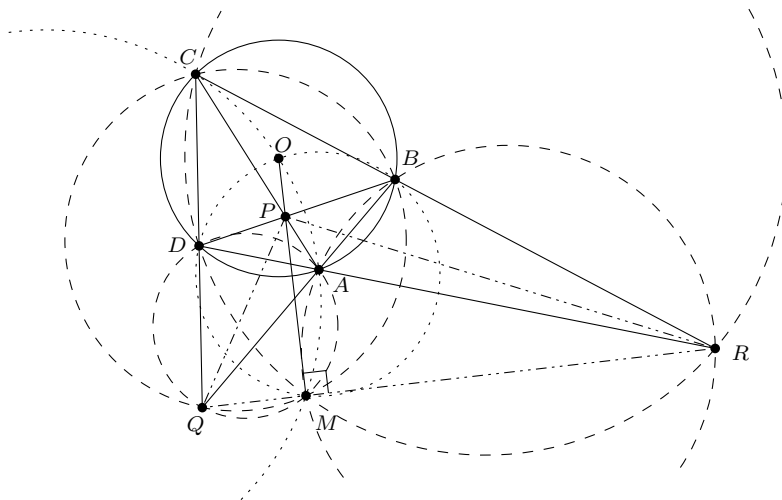
Shrnutí

Shrňme si vše důležité, co jsme zjistili, do jedné věty.

Věta. (Velká Věta Vo Vobrázku) *Nechť na kružnici se středem O leží čtyři různé body A, B, C a D . Přímky AC a BD se protínají v P , přímky AB a CD se protínají v Q a přímky AD a BC se protínají v R . Dále nechť přímka OP protíná přímku QR v bodě M . Potom platí:*

- (1) *Kružnice (QAD) , (QBC) , (RAB) , (RDC) , (AOC) a (BOD) procházejí bodem M . Tedy M je Miquelovým bodem přímk AB , BC , CD a DA .*
- (2) *Bod M je střed spirální podobnosti, která přenáší A na B a D na C . Zároveň se jedná o střed spirální podobnosti, která přenáší A na D a B na C .*
- (3) *Platí $OM \perp QR$.*

- (4) Bod M je inverzem bodu P vzhledem ke kružnici $(ABCD)$.
 (5) Trojúhelník PQR je tripolární vzhledem k této kružnici.



Cvičení

Příklad 1. Kružnice se středem O prochází vrcholy A a C trojúhelníku ABC a protíná úsečky AB a BC znovu v bodech K a N . Kružnice (ABC) a (KBN) se protínají v bodech B a M . Dokažte, že $OM \perp MB$. (IMO 1985)

Příklad 2. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω se středem O . Jeho diagonály AC a BD se protínají v bodě P . Kružnice (APB) a (CPD) se protínají v bodech P a Q . Předpokládejme, že body O , P a Q jsou různé. Dokažte, že $OQ \perp QP$. (Čína 1992)

Příklad 3. Kružnice ω_1 a ω_2 se protínají v bodech O a M . Kružnice ω se středem v O protíná zbylé dvě kružnice ve čtyřech různých bodech A, B, C a D takových, že $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Přímky AB a CD se protínají v bodě N_1 a přímky AD a BC v bodě N_2 . Ukažte, že $OM \perp N_1N_2$.

Příklad 4. Uvažujme půlkružnici ω nad průměrem AB se středem O . Přímka ℓ protíná přímku AB v bodě M a půlkružnici ω v bodech C, D tak, že $|MA| > |MB|$ a $|MD| > |MC|$. Kružnice (AOD) a (BOC) se protínají v bodě K . Ukažte, že K leží na kružnici nad průměrem MO . (Rusko 1995, Rumunsko TST 1996, Írán 1997)

Příklad 5.

- (1) Necht A, B, C a D jsou čtyři body v rovině. Přímky AC a BD se protínají v P , přímky AB a CD v Q a přímky AD a BC v R . Přímka skrz P rov-

noběžná s QR protíná přímky AB a CD v bodech X a Y . Ukažte, že P je středem úsečky XY .

- (2) (Butterfly Theorem) Buď ω kružnice s tětívou EF . Označme si střed EF jako P . Nechť skrz P prochází další dvě tětivy AC a BD . Nechť AB a CD protínají EF v bodech X a Y . Ukažte, že $|EX| = |YF|$.

Příklad 6. Nechť $ABCD$ je tětívový čtyřúhelník se středem O . Přímky AB a CD se protínají v bodě Q . Buď ℓ kolmice na OQ skrz Q . Přímky BD a AC protínají ℓ v bodech X a Y . Ukažte, že $|XQ| = |QY|$.

Příklad 7. Buď ABC trojúhelník s kružnicí opsanou ω . Tečny k ω v bodech B a C se protínají s bodě T . Nechť S je bod na polopřímce BC takový, že $AS \perp AT$. Body B_1 a C_1 leží na polopřímce ST tak, že $|B_1T| = |BT| = |C_1T|$ tak, že C_1 leží na úsečce B_1S . Dokažte, že trojúhelníky ABC a AB_1C_1 si jsou podobné.

(USA TST 2007)

Příklad 8. Nechť ABC je trojúhelník s vepsíštěm I . Označme si středy stran AB a AC jako M a N . Body D a E leží na stranách AB a AC tak, že $|DB| = |BC| = |CE|$. Přímka ℓ_1 , resp. ℓ_2 , je kolmice spuštěná z bodu D , resp. E , na přímku IM , resp. IN . Průsečík ℓ_1 a ℓ_2 označme jako P . Ukažte, že platí $AP \perp BC$.

Příklad 9. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, jehož strany BC a AD jsou různoběžné a stejně dlouhé. Body E a F leží na stranách BC a AD tak, že $|BE| = |DF|$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P , přímky BD a EF se protínají v bodě Q a přímky EF a AC se protínají v bodě R . Uvažujme všechny kružnice (PQR) , když se body E a F hýbou po příslušných stranách. Ukažte, že všechny tyto kružnice mají společný bod různý od P .

(IMO 2005)

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník, jehož kružnice vepsaná se dotýká stran AB , BC , CD a DA v bodech E , F , G a H .

- (1) Ukažte, že přímky AC , EF a GH procházejí jedním bodem.
- (2) Ukažte, že přímky AC , BD , EG a FH procházejí jedním bodem.

Příklad 11. Nechť $ABCD$ je tětívový čtyřúhelník. Přímky AB a DC se protínají v bodě Q a přímky AD a BC v bodě R . Tečny z bodu R se dotýkají dané kružnice v bodech X a Y . Ukažte, že Q , X a Y leží na jedné přímce.

(Čína 1997)

Příklad 12. Nechť $ABCD$ je tětívový čtyřúhelník se středem O . Přímky AB a CD se protínají v bodě E , přímky AD a BC v bodě F a přímky AC a BD v bodě P . Dále se přímky EP a AD protínají v K . Buď M kolmá projekce bodu O na AD . Dokažte, že $BCMK$ je tětívový čtyřúhelník.

Příklad 13. Body A_1 , B_1 a C_1 leží na stranách BC , CA a AB trojúhelníka ABC . Kružnice (B_1AC_1) , (C_1BA_1) , (A_1CB_1) protínají (ABC) podruhé v bodech A_2 , B_2 a C_2 . Obrazy bodů A_1 , B_1 a C_1 podle středů stran BC , CA a AB označme jako A_3 , B_3 a C_3 . Ukažte, že trojúhelníky $A_2B_2C_2$ a $A_3B_3C_3$ jsou si podobné.

(IMO SL 2006)

Příklad 14. Eulerův bod tětíivového čtyřúhelníku

- (1) Buď $ABCD$ tětíivový čtyřúhelník. Necht' H_A , H_B , H_C a H_D jsou kolmiště trojúhelníků BCD , CDA , DAB a ABC . Ukažte, že $H_AH_BH_CH_D$ je jen obrazem $ABCD$ podle nějakého bodu E (tento bod nazýváme *Eulerův bod* čtyřúhelníku $ABCD$).
- (2) Ukažte, že E leží na Feuerbachově kružnici trojúhelníku ABC .
- (3) Ukažte, že E leží na Simsonově přímce trojúhelníku ABC a bodu D .
- (4) Ukažte, že E je Eulerův bod čtyřúhelníku $H_AH_BH_CH_D$.
- (5) Ukažte, že E leží na kolmici ze středu AB na přímkou CD .

Literatura a zdroje

- [1] Yufei Zhao: *Cyclic Quadrilaterals - The Big Picture*,
http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf