Těžiště v kombinatorice

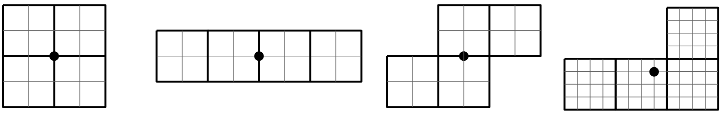
Monča Pospíšilová

Úvod

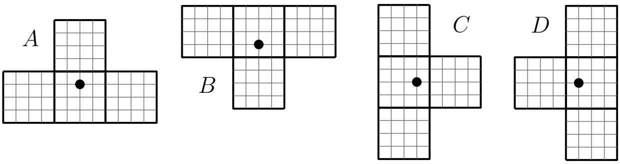
Kombinatorické úlohy, ve kterých máme danými útvary pokrýt určitou plochu, lze elegantně řešit pomocí obarvování. Zde se naučíme tytéž úlohy řešit jinak. Využijeme vlastností těžiště, čímž se řešení úlohy převede na jiný, jednodušší problém. Uvidíme, že zpravidla dojdeme k triviálnímu sporu typu „sudé není liché“ nebo naopak.

Obvykle se plocha pokrývá „kostičkami“, které se odborně nazývají k-mina nebo polymina (např. trimina, tetramina, pentamina). V následujících úlohách se využívají především tetramina. Těžiště všech existujících tetramin jsou znázorněna na obrázku:

a)



b)



O těžišti

Jedna z hlavních vlastností těžiště, kterou budeme využívat, je

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0},$$

kde O je těžiště bodů $X_1, \ldots, X_n$ s hmotnostmi $m_1, \ldots, m_n$. V našem případě body $X_1, \ldots, X_n$ představují těžiště tetramin, jež mají ale všechny stejnou „hmotnost“, proto platí:

$$\overrightarrow{OX_1} + \cdots + \overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0}.$$

Návod jak začít

Než začneme úlohu řešit, rozmyslíme si, kde je těžiště daných kostiček a plochy, kterou pokrýváme. Potom si oba objekty „přeškálujeme“ tak, aby obě těžiště ležela na průsečíku (viz obrázek) a dílčí malé kostičky obou objektů měly stejný rozměr. Pak do těžiště pokrývaného útvaru položíme střed souřadného systému. Jednotková vzdálenost bude délka strany malé dílčí kostičky. Potom součet všech x-ových i y-ových souřadnic těžišť k-min musí být roven 0.

Příklady

Příklad 1. Čtvercová podlaha je pokryta dlaždicemi typu 2×2 a 1×4. Jedna dlaždice se ale rozbila. K dispozici máme dlaždici druhého typu. Ukažte, že není možné dlaždice přeskládat tak, aby podlahu pokryly.

Příklad 2. Dokažte, že šachovnici 10×10 nelze pokrýt 25 tetraminy typu T.

Příklad 3. Dokažte, že šachovnici 10×10 nelze pokrýt 25 tetraminy typu I.

Příklad 4. Dokažte, že šachovnici 8×8 nelze pokrýt 15 tetraminy typu T a jedním tetraminem typu O.

Příklad 5. Máme šachovnici $n \times n$ bez rohových polí. Pro jaká n lze šachovnici pokrýt tetraminy typu L?

Příklad 6. Středové souměrný útvar je složený z n tetramin L a k tetramin I. Dokažte, že n je sudé. (Prasolov)

Příklad 7. Čtverec 7×7 je pokryt šestnácti dílky 3×1 a jedním 1×1. Kde všude může být dílek 1×1?

Příklad 8. Máme šachovnici $n \times n$ pokrytou tetraminy typu T. Nechť a, b, c, d jsou počty tetramin všech čtyř možných orientací (dle obr. b) označených A, B, C, D. Dokažte, že $4 \mid (a + b - c - d)$ (Dobosevych)

Příklad 9. Lze nějakou středově souměrnou plochu pokrýt tetraminy typu L a triminy typu „roh“? Polymina je zakázáno otáčet či převracet.

Literatura a zdroje

[1] Harun Šiljak: *Centroids and Tiling Problems*, Mathematical reflections 5, 2009.

[2] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.