Tětivové čtyřúhelníky

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Abstrakt. Zopakujeme si základní vlastnosti tětivových čtyřúhelníků a procvičíme na úlohách. Přednáška bude spíše lehká, koncipována jako příprava na olympiádu.

Věta 1. (o obvodových a středových úhlech) *Mějme kružnici se středem S, její tětivu AB a libovolný bod M na větším oblouku AB. Úhel ASB nazýváme středovým a úhel AMB obvodovým k příslušné tětivě AB. Platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AMB|$.*

Věta 2. (o úsekových úhlech) *Mějme kružnici a na ní tětivu AB. Veďme přímku t, která se dotýká kružnice v bodě A. Odchylku AB od t nazveme* úsekovým úhlem *k tětivě AB. Úsekový úhel má stejnou velikost jako příslušný obvodový úhel.*

Definice 3. *Čtyřúhelník je* tětivový *když mu lze opsat kružnice. Pro takový čtyřúhelník platí, že součet protějších úhlů je* $180°$.

Lehké úlohy

Příklad 4. Máme zadané dvě kružnice k a l s průsečíky X a Y. Bodem X veďme přímku, která protíná k v bodě A a l v bodě C. Nyní i bodem Y veďme přímku. Ta protíná k v bodě B a l v bodě D. Dokažte $AB \parallel CD$.

Příklad 5. Máme zadané dvě kružnice k a l s průsečíky X a Y. Sestrojíme $\triangle AXB$ takový, že $A \in k$, $B \in l$ a $Y \in AB$. Najděte, kdy bude mít $\triangle AXB$ největší obsah.

Příklad 6. Máme zadané tři kružnice k, l a m procházející společným bodem P. Další průsečíky kružnic k, l, kružnic l, m a kružnic k, m označme postupně A, B, C. Nyní zvolme na kružnici k bod K různý od A, P, C. Přímka KA protne l v bodě L a přímka LB protne m v bodě M. Dokažte, že bod C leží na přímce KM.

Příklad 7. Nechť D je bod na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníka ABC. Dále X je střed kružnice opsané $\triangle ACD$ a Y střed kružnice opsané $\triangle BDC$. Dokažte, že body C, D, X a Y leží na jedné kružnici.

Příklad 8. $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB. Dále označme X průsečík přímek

Klíčová slova. geometrie, tětivové čtyřúhelníky

AC a p, obdobně Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

Středně lehké úlohy

Příklad 9. Na kratším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ je bod P. Nechť $PD \cap AB = X$ a $PC \cap BD = Y$. Dokažte, že $|\sphericalangle XYB| = 90°$.

Příklad 10. Mějme čtverec $ABCD$. Na jeho straně BC je bod P, na straně CD bod Q a platí $|\sphericalangle QAP| = 45°$. $AP \cap BD = X$, $AQ \cap BD = Y$. Dokažte, že body X, Y, P, Q a C leží na jedné kružnici.

Příklad 11. Mějme pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB \perp AD$). Sestrojme kružnici k, která se dotýká přímky AB v bodě A a přímky CD v bodě D. Dále sestrojme kružnici l. Ta se dotýká přímky AB v bodě B a prochází bodem C. Nechť kružnice k a l mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle PCB|$.

Středně těžké úlohy

Příklad 12. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.

Příklad 13. Nechť kružnice k s průměrem AB protíná kružnici l, jejíž střed je v bodě A v bodech C a D. Uvažujme bod M, různý od bodů C a D, který leží na kružnici l. Označme P a Q po řadě průsečíky přímek CM a DM s kružnicí k. Dokažte, že $MBPQ$ je rovnoběžník.

Literatura

Přednáška čerpá příklady ze semináře Michala „Kennyho“ Rolínka *Umění vidět v matematice* a z PraSečí knihovny (`mks.mff.cuni.cz/library`).