Tětivové čtyřúhelníky

Martin Töpfer

Abstrakt. Úvodní přednáška o tětivových čtyřúhelnících. Hlavní důraz je kladen na počítání úhlů. Příspěvek obsahuje znění vět o obvodových, středových a úsekových úhlech a deset úloh.

Základní pojmy

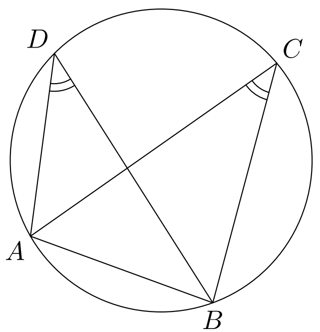
Věta. (o obvodových a středových úhlech) *Mějme kružnici se středem S, její tětivu AB a libovolný bod M na větším oblouku AB. Úhel ASB nazýváme středovým a úhel AMB obvodovým k příslušné tětivě AB. Platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AMB|$.*

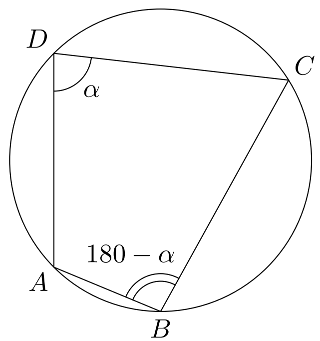
Věta. (o úsekových úhlech) *Mějme kružnici a na ní tětivu AB. Veďme přímku t, která se dotýká kružnice v bodě A. Odchylku AB od t nazveme úsekovým úhlem k tětivě AB. Úsekový úhel má stejnou velikost jako příslušný obvodový úhel.*

Definice. Čtyřúhelník je *tětivový*, když mu lze opsat kružnici.

K důkazu tětivovosti čtyřúhelníka nám mohou pomoci dvě jeho základní vlastnosti (plynoucí triviálně z věty o obvodovém a středovém úhlu). Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když je splněna jedna z podmínek:

(i) součet protějších úhlů je $180°$,
(ii) jedna z jeho stran je vidět ze zbylých vrcholů pod stejným úhlem.





Lehké příklady

Příklad 1. Mějme trojúhelník ABC. Osa úhlu BCA protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v bodě $\check{S} \neq C$. Dokažte, že $\check{S}$ je střed oblouku AB (který neobsahuje bod C).

Příklad 2. Mějme trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H. Dokažte, že obrazy H v osových souměrnostech podle stran $\triangle ABC$ leží na kružnici opsané ABC.

Příklad 3. Označme D, E a F paty výšek ostroúhlého trojúhelníka ABC. Dokažte, že výšky $\triangle ABC$ jsou osami úhlů $\triangle DEF$.

Příklad 4. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC. Označme S, S_1 a S_2 středy kružnic opsaných postupně trojúhelníkům ABC, AMC a BMC. Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na jedné kružnici.

(MO 56–A–II–3a)

Další příklady

Příklad 5. (Simsonova přímka) Je dán trojúhelník ABC a bod D na jeho kružnici opsané. Z bodu D spustíme kolmice na strany BC, CA, AB a jejich paty označíme P, Q, R. Dokažte, že P, Q, R leží v přímce.

Příklad 6. Na kratším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ je bod P. Nechť $PD \cap AB = X$ a $PC \cap BD = Y$. Dokažte, že $|\sphericalangle XYB| = 90°$.

Příklad 7. Mějme čtverec $ABCD$. Na jeho straně BC je bod P, na straně CD bod Q a platí $|\sphericalangle QAP| = 45°$. Nechť $AP \cap BD = X$, $AQ \cap BD = Y$. Dokažte, že body X, Y, P, Q a C leží na jedné kružnici.

Příklad 8. Mějme pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB \perp AD$). Sestrojme kružnici k, která se dotýká přímky AB v bodě A a přímky CD v bodě D. Dále sestrojme kružnici l. Ta se dotýká přímky AB v bodě B a prochází bodem C. Nechť kružnice k a l mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle PCB|$.

(MO 52–II–4)

Příklad 9. Je dána kružnice nad průměrem UV a její tětiva AB se středem S taková, že bod B neleží na UV. Patu kolmice z B na UV označme C. Ukažte, že úhel BCS se nezmění, pokud s tětivou AB začneme pohybovat po celé kružnici.

(MKS 28–2–6)

Příklad 10. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. (MO 59–A–II–2)