Tětivové čtyřúhelníky

Honza Kadlec

Abstrakt. Jednoduchá a základní přednáška o tětivových čtyřúhelnících. Hlavní důraz je kladen na počítání úhlů a hledání tětivových čtyřúhelníků. Příspěvek obsahuje znění vět o obvodových, středových a úsekových úhlech a několik úloh, včetně mnoha úloh olympiádních.

Základní pojmy

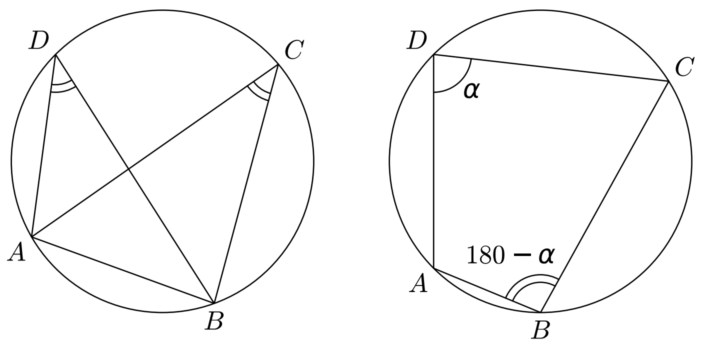
Věta. (o obvodových a středových úhlech) *Mějme kružnici se středem S, její tětivu AB a libovolný bod M na větším oblouku AB. Úhel ASB nazýváme středovým a úhel AMB obvodovým k příslušné tětivě AB. Platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AMB|$.*

Věta. (o úsekových úhlech) *Mějme kružnici a na ní tětivu AB. Veďme přímku t, která se dotýká kružnice v bodě A. Odchylku AB od t nazveme úsekovým úhlem k tětivě AB. Úsekový úhel má stejnou velikost jako příslušný obvodový úhel.*

Definice. Čtyřúhelník je *tětivový*, když mu lze opsat kružnici.

K důkazu tětivovosti čtyřúhelníka nám mohou pomoci dvě jeho základní vlastnosti (plynoucí triviálně z věty o obvodovém a středovém úhlu). Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když je splněna jedna z podmínek:

(i) součet protějších úhlů je $180°$,
(ii) jedna z jeho stran je vidět ze zbylých vrcholů pod stejným úhlem.



Lehké příklady

Příklad 1. Mějme trojúhelník ABC. Osa úhlu BCA protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v bodě $\check{S} \neq C$. Dokažte, že $\check{S}$ je střed oblouku AB (který neobsahuje bod C).

Příklad 2. Mějme trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H. Dokažte, že obrazy H v osových souměrnostech podle stran $\triangle ABC$ leží na kružnici opsané ABC.

Příklad 3. Označme D, E a F paty výšek ostroúhlého trojúhelníka ABC. Dokažte, že výšky $\triangle ABC$ jsou osami úhlů $\triangle DEF$.

Příklad 4. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC. Označme S, S_1 a S_2 středy kružnic opsaných postupně trojúhelníkům ABC, AMC a BMC. Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na jedné kružnici.
(MO 56–A–II–3a)

Příklad 5. Rovnostrannému trojúhelníku KLM opíšeme kružnici. Na kratším oblouku KL této kružnice si zvolíme bod Q. Pak z bodu M spustíme kolmice na přímky QK a QL a jejich paty označíme E a F. Ukažte, že trojúhelník MEF je rovnostranný. (MKS 28–2–3)

Další příklady

Příklad 6. (Simsonova přímka) Je dán trojúhelník ABC a bod D na jeho kružnici opsané. Z bodu D spustíme kolmice na strany BC, CA, AB a jejich paty označíme P, Q, R. Dokažte, že P, Q, R leží v přímce.

Příklad 7. Na kratším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ je bod P. Nechť $PD \cap AB = X$ a $PC \cap BD = Y$. Dokažte, že $|\sphericalangle XYB| = 90^\circ$.

Věta 8. (Japonský teorém) *Nechť je $ABCD$ libovolný tětivový čtyřúhelník a nechť jsou M_1, M_2, M_3, M_4 středy trojúhelníků $\triangle ABD$, $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$. Pak je čtyřúhelník $M_1M_2M_3M_4$ pravoúhlý.*

Důkaz. Dokaž za pomoci znalostí o tětivových čtyřúhelnících a úhlech. □

Příklad 9. Uvnitř základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC leží bod D. Zvolme bod E tak, aby $ADEC$ byl rovnoběžník. Na polopřímce opačné k ED leží bod F takový, že $|EB| = |EF|$. Dokažte, že délka tětivy, kterou vytíná přímka BE v kružnici opsané trojúhelníku ABF, je dvojnásobkem délky úsečky AC.
(MO 66–A–I–5)

Příklad 10. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel $\sphericalangle OAC$ je pravý. (MO 67–A–I–5)

Příklad 11. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H. Osa úhlu $\sphericalangle BHC$ protíná stranu BC v bodě D. Označme postupně E a F obrazy bodu D v osových souměrnostech podle přímek AB a AC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AEF prochází středem G kružnicového oblouku BAC.

(MO 66–A–III–5)

Příklad 12. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a J střed kružnice připsané straně AD trojúhelníku ACD. Dokažte, že přímky IJ a AB jsou rovnoběžné.

(MO 67–A–III–5)

Příklad 13. Je dána kružnice nad průměrem UV a její tětiva AB se středem S taková, že bod B neleží na UV. Patu kolmice z B na UV označme C. Ukažte, že úhel BCS se nezmění, pokud s tětivou AB začneme pohybovat po celé kružnici.

(MKS 28–2–6)

Příklad 14. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. (MO 59–A–II–2)

Literatura a zdroje

[1] Martin Töpfer: *Tětivové čtyřúhelníky*, Mentaurov, 2013.