Teorie her

VIKI NĚMEČEK

ABSTRAKT. V příspěvku se budeme zabývat kombinatorickými hrami s úplnou informací pro dva hráče. Vysvětlíme si základní pojmy, zahrajeme si několik jednodušších her a naučíme se pár klasických triků. Ve druhé části zavedeme SG-funkci a naučíme se sčítat i složitější hry.

Úmluva. Budeme se zabývat pouze hrami, které splňují následující podmínky:

(1) hrají vždy dva hráči proti sobě a pravidelně se střídají v tazích,
(2) pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy,
(3) jsou konečné a skončí vítězstvím jednoho z hráčů,
(4) jsou s úplnou informací (žádné skryté ani simultánní tahy),
(5) jsou bez náhody.

Hra se může ocitnout v konečném počtu různých stavů[1] jednoho z těchto typů:

(1) V – vyhrávající stav = buď existuje takový tah, který změní stav hry na P, nebo se jedná o koncový stav definovaný jako vyhrávající,
(2) P – prohrávající stav = všechny povolené tahy změní stav hry na V.

Počáteční stav je zpravidla jediný, zatímco koncových může být více a o každém by pravidla hry měla vypovídat, zda je V, nebo P.

Poznámka. Hry, které můžou skončit remízou, vůbec neuvažujeme, ale nebyl by problém podobně zavést také neprohrávající a nevyhrávající stavy.

Věta. *Právě jeden z hráčů má vyhrávající strategii.*

Důkaz. Z definice stavů V a P plyne, že pokud se první hráč nachází ve stavu V, tak může zahrát takový tah, že soupeř bude během svého tahu ve stavu P a musí prvního hráče dostat opět do stavu V. Protože je hra konečná, tak tímto opakováním první hráč dosáhne vítězství, a má tedy vyhrávající strategii.

Pokud je ovšem na začátku hra ve stavu P, tak všechny tahy prvního hráče vedou do stavu V a druhý hráč se ocitá v roli prvního v předchozích úvahách, a má tedy vyhrávající strategii.

U každé z následujících her rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

[1] Stav je jednoznačně popsán pozicí hry a hráčem, který je na tahu.

Příklad 1. (Lámání čokolády) Čokoláda o $m \times n$ čtverečkách se smí lámat rovně po vyznačených čarách. Hráč, který je na tahu, si vybere některý z kousků a jednou ho rozlomí. Hráč, který nemůže nic rozlomit, prohrál.

Časté postupy

U her, v nichž prohraje hráč, který nemůže táhnout, je jedním z častých triků nalezení či vytvoření symetrie. V prvním případě hledáme vyhrávající strategii pro druhého hráče. Pokud se nám podaří nahlédnout, že je hra v nějakém smyslu symetrická, a každý tah, který první hráč udělá, může druhý hráč zopakovat podle nalezené symetrie, pak má druhý hráč evidentně vyhrávající strategii.

V druhém, častějším případě sice hra symetrická není, ale dá se na symetrickou převést tahem prvního hráče. Potom je však ve chvíli, kdy se stala hra symetrickou, na tahu druhý hráč, tedy nalezená vyhrávající strategie patří začínajícímu hráči.

Příklad 2. (Lámání čokolády podruhé) Stejná pravidla jako v předchozí hře, ale začíná se s čokoládou $2m \times n$ a nesmí se ulamovat dílky velikosti 1×1.

Příklad 3. (Mince v řadě) V řadě je deset mincí různých hodnot. Hráč, který je na tahu, z jednoho konce řady vezme jednu minci. Vyhrává hráč, který získá největší obnos.

Příklad 4. (Chomp) Čtvercová tabulka čokolády je rozlámaná na kostičky. Kostička v levém horním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku a sní ji, všechny kostičky od ní napravo, všechny kostičky od ní dolů a navíc všechny kostičky, které jsou od ní napravo i dolů. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí.

Příklad 5. (Mince na stole) Do kružnice o průměru jeden metr dva hráči střídavě kreslí neprotínající se kruhy o průměru jeden centimetr. Hráč, který první nemá svůj kruh kam nakreslit, prohrál.

Dalším častým trikem je kradení strategií. To lze využít v případě, že se jeden (typicky první) z hráčů může dostat prvním pohybem do nějaké množiny pozic M, a existuje $m \in M$ takové, že se z něj může dále druhý hráč dostat pouze do nějaké (ne nutně vlastní) podmnožiny $M \setminus \{m\}$.

Potom jsou dvě možnosti: buď má hra v pozici m vyhrávající strategii pro hráče, který není na řadě, čímž jsme našli vyhrávající strategii pro začínajícího hráče v původní hře (začne tahem do pozice m a dále hraje podle této strategie). Ve druhém případě existuje strategie pro hráče, který je v pozici m na řadě, a určitě je v ní nějak definovaný první tah. Do stavu, kam vede, se ale evidentně umí dostat začínající hráč v původní hře přímo. Proto má v takové hře vždy vyhrávající strategii první hráč.

Příklad 6. (Čísla v lahvi) V lahvi jsou všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, vyndá z lahve nějaké číslo a všechny jeho dělitele. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 7. (Čokoláda počtvrté) Vyřešte znovu úlohu číslo 4 pro obdélníkovou tabulku čokolády.

Příklad 8. (Přičítání dělitele) Začíná se s dvojkou. V jednom kroku hráč přičte k číslu nějakého jeho vlastního dělitele (to je dělitel menší než číslo samotné). Kdo překročí číslo 2011, vítězí. Má začínající hráč vítěznou strategii? A co kdyby ten, kdo překročí 2011, prohrál?

Nim

Nim je kombinatorická hra, na niž je možné spoustu jiných her převést (tuto skutečnost zde nebudeme dokazovat, ale ve skutečnosti lze každá konečná nestranná[2] hra na Nim převést).

Definice. (Nim) V několika hromádkách je určitý počet kamenů. Hráč, který je na tahu, musí odebrat z jedné hromádky alespoň jeden kámen. Vyhrává hráč, který odebere poslední kámen.

Definice. (Nim součet) *Nim-součtem* čísel x a y je číslo $x \oplus y$, jemuž se běžně říká binární xor. Jedná se o binární sčítání bez přenosu. Např. $21 \oplus 7 = (10101)_2 \oplus (111)_2 = (10010)_2 = 18$.

Věta. *Ve hře Nim je prohrávající pozice právě ta, v níž se Nim-součet velikostí všech hromádek rovná nule.*

Náznak důkazu. Je potřeba dokázat celkem tři věci. Zaprvé, že v každém koncovém stavu je Nim-součet velikostí všech hromádek roven nule. Zadruhé, že z každého stavu s Nim-součtem rovným nule vedou všechny tahy do stavu s nenulovým Nim-součtem. A konečně za třetí musíme ukázat, že pokud máme nenulový Nim-součet, existuje tah, který ho vynuluje.

První část důkazu je triviální, druhou a třetí si zkuste rozmyslet jako cvičení. Pokud se vám nebude dařit, mezi návody k příkladům najdete radu.

Příklad 9. (Northcottova hra) Pozice ve hře je šachovnice 8×8 s jednou černou a jednou bílou figurkou v každém řádku. Hráč, který je na tahu, táhne figurkou svojí barvy o libovolný počet políček vodorovně směrem k figurce soupeře (nesmí ji přeskočit). Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 10. (Schody) Na schodišti s 2013 schody je rozmístěno několik mincí (na každém schodě jich může být více, či tam nemusí být žádná). V každém tahu si hráč vybere jeden schod a z něj přesune libovolné množství mincí (nejméně jednu, nejvýše všechny) o schod níže. S mincemi, které se po přesunu z prvního schodu ocitnou na podlaze, už se dál nehraje. Prohrává opět hráč, který nemůže táhnout.

[2] Hra je nestranná, pokud možné tahy z dané pozice jsou pro oba hráče stejné. Tedy například šachy nestranné nejsou, protože jeden hráč může pohybovat jen bílými figurkami, kdežto druhý jen černými.

Sčítání her

Příklad 11. (Šachovnice podruhé) V pravém dolním rohu každé z N šachovnic o rozměrech $a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, \ldots, a_N \times b_N$ stojí figurka. Tou se smí v jednom tahu pohnout pouze nahoru, vlevo nebo šikmo vlevo nahoru, a to buď o jedno nebo o dvě políčka. Hráč, který je na tahu, si vybere šachovnici a udělá na ní takový tah, aby figurka neopustila šachovnici. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Definice. (Sprague–Grundyho funkce) *Sprague–Grundyho funkcí* rozumíme funkci g, která každému stavu v přiřadí nejmenší nezáporné celé číslo n takové, že $n \neq g(u)$ pro všechny stavy u, do kterých se dá dostat tahem ze stavu v.

Tvrzení. *Pokud ve hře prohrává hráč, který nemůže táhnout, potom jsou prohrávající právě ty stavy v, pro které $g(v) = 0$.*

Důkaz. Stejně jako v důkazu optimální strategie pro Nim.

Definice. (Sčítání her) *Součtem her* myslíme hru, v níž si hráč může v každém svém tahu vybrat některou z dílčích her a v ní udělat tah. Pro jednoduchost jej budeme definovat pouze pro hry, kde prohrává hráč, který již nemůže táhnout.

Věta. (Sprague, 1936; Grundy, 1939) *Při součtu N her se Sprague–Grundyho funkcemi $g_1, \ldots, g_N$ v počátečních stavech $v_1, \ldots, v_N$ získáme hru s SG funkcí $g(v_1, \ldots, v_N) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \cdots \oplus g_N(v_N)$.*

Příklad 12. (Nim podruhé) Mějme tři hromádky sirek o 9, 10, resp. 14 sirkách. Hráč, který je na tahu, si vybere jednu hromádku a odebere z ní několik sirek. Z první hromádky je možné odebrat 1 až 3 sirky, z druhé 1 až 5 a z té poslední 1 až 7 sirek. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 13. (Laskerův Nim) Hra je stejná jako obyčejný Nim, ale navíc lze místo tahu rozdělit hromádku na dvě neprázdné hromádky.

Nějaké další příklady

Příklad 14. (Čtverečky) Na šachovnici $n \times m$, kde n i m jsou alespoň 5, se dva hráči střídají v vybarvování políček. Jeden vždy vybarví čtverec 2×2, druhý libovolně orientované L-triomino. Žádné políčko nesmí být vybarveno dvakrát a ten, kdo nemůže táhnout, vyhrál. Ukažte, kdo z hráčů má vyhrávající strategii v závislosti na m, n a tom, který z hráčů začíná.

Příklad 15. (Čtvercové piškvorky) Hraje se na čtverečkovaném papíře 10×10. Ve svém tahu nakreslí hráč jeden svůj symbol do nějakého prázdného čtverečku. První hráč se snaží utvořit čtverec 2×2 ze svých symbolů a cílem druhého hráče je mu v tom zabránit.

Příklad 16. (Razítka) Začíná se na šachovnici 8×8. Hráč, který je na tahu, si vybere prázdné políčko a dá na něj razítko. Vybrané políčko musí hranou sousedit s tím předchozím. První hráč může dát razítko, kam chce. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad 17. (Šachovnice) Na políčku ($x \geq 0, y \geq 0$) stojí obyčejný šachový kůň. Hráč, který je na tahu, může udělat tah koněm, ale pouze takový, při němž kůň neopustí šachovnici (žádná jeho souřadnice nesmí být záporná) a součet jeho souřadnic klesne. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Jak dopadne hra, v níž bude několik koňů, každý na jiném počátečním políčku, a hráč může táhnout, kolika koni chce, ale vždy alespoň jedním? (MO 60–P–III–2)

Příklad 18. (Kayles) Dva kuželkáři stojí před řadou třinácti kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak šikovní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Návody

1. Zkuste si hru párkrát zahrát s malou čokoládou a počítejte, kolik tahů bude celkem hra mít.

4. První hráč vybere kostičku rohem sousedící s otrávenou kostičkou.

5. Je potřeba vyřešit problém, že kruhy, které obsahují střed kružnice, nejde kreslit po dvojicích symetricky podle tohoto středu.

6. Co se stane, když první hráč vytáhne jedničku? A co když ne?

7. Políčko vpravo dole.

8. Vyzkoušejte si prvních pár možných stavů.

Důkaz strategie na Nim. Pro druhou část důkazu si všimneme, že pokud jsme vzali kámen z hromádky, kde bylo n kamenů a po našem tahu jich tam zůstalo m, je Nim-součet nyní právě $m \oplus n$. Pro třetí část si stačí uvědomit, že pokud vezmeme libovolnou hromádku, na níž má počet kamenů jedničku na nejvyšším řádu, kde má jedničku Nim-součet všech hromádek, pak je Nim-součet všech hromádek kromě této menší než velikost této hromádky, takže ji můžeme zmenšit tak, aby se Nim-součet vynuloval.

10. Zkuste si napřed hru vyřešit pro případ, kdy jsou mince pouze na lichých schodech.

17. Nejprve si vyřešte pro jednoho koně. Dejte si pozor na to, že se nejedná o klasický součet her, protože můžeme hrát ve více hrách současně.

Literatura a zdroje

Většina příkladů z tohoto příspěvku byla převzata od *Filipa Hláska*, který je připravil na soustředění v Hojsově Stráži v roce 2011 a kterému tímto děkuji.