Teorie množin

Tomáš Matoušek

Jazyk teorie množin

Každý objekt v teorii množin je množina. U dvou množin x, y můžeme zjišťovat, zda jedna je *prvkem* druhé, či nikoliv. K tomu slouží binární predikátový symbol *náležení* $\in$. Zkratkou za $\neg(x \in y)$ je $x \notin y$. Dalším predikátovým symbolem je symbol rovnosti $=$, který nám říká, zda dvě proměnné představují stejný objekt – množinu. Formule jsou definované obvyklým způsobem.

Axiomy teorie množin (Zermel-Fraenkel)

Obvykle se uvádí devět axiomů, ale některé jsou nadbytečné – dají se odvodit z ostatních. Uvedeme zde pro představu prvních několik axiomů.

1. $(\exists x)\ x = x$ (axiom existence)
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$ (axiom extenzionality)
3. $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)\ x \in z \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)$ (axiom dvojice)

Podle axiomu 1 existuje aspoň jedna množina a svět teorie množin tedy není prázdný. Axiom 2 nám říká, že množina je jednoznačně určena svými prvky. Axiom 3 dovoluje vytvořit množinu obsahující dvě jiné množiny – dvojici.
Kromě axiomů obsahuje teorie množin i dvě schémata („šablony“ na axiomy). Jednodušší z nich je *schéma vydělení*.

Schéma axiomů. (vydělení) *Pro libovolnou formuli φ jazyka teorie množin, v níž nemá proměnná z volný výskyt, je formule*

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\ x \in z \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x))$$

axiomem teorie množin. Jinak řečeno, když vezmeme z množiny a prvky splňující formuli φ, dostaneme množinu z.

Definice. (třída) *Je-li $\psi(x)$ formule jazyka teorie množin s volnou proměnnou x, pak třída $\{x : \psi(x)\}$ je označením všech množin x splňujících tuto formuli.*

Třída je pouze formálním zápisem. Může, ale nemusí představovat množinu. Například třída $\{x : x \in a \wedge \varphi(x)\}$, kde a, φ jsou ze schématu vydělení, je podle tohoto schématu množina.

Věta. *Třída $\{x : x = x\}$ není množina, tj. neexistuje množina všech množin.*

Definice. (uspořádaná k-tice) *Jsou-li $a_1, \ldots, a_k$ množiny, pak uspořádaná 1-tice je $(a_1) = \{a_1\}$, uspořádaná dvojice (a_1, a_2) je $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ a pro $k > 2$ definujeme uspořádanou k-tici $(a_1, \ldots, a_k)$ jako $((a_1, \ldots, a_{k-1}), a_k)$.*

Dále budeme používat obvyklé pojmy jako prázdná množina a podmnožina bez přesné definice, která je však triviální.

Věta. (definice množinových operací) *Jsou-li a, b množiny, pak*
1. $a \cup b = \{x : x \in a \vee x \in b\}$
2. $a \cap b = \{x : x \in a \wedge x \in b\}$
3. $a \setminus b = \{x : x \in a \wedge x \notin b\}$
4. $a \times b = \{(x, y) : x \in a \wedge y \in b\}$ *(kartézský součin)*
5. $\mathcal{P}(a) = \{x : x \subseteq a\}$ *(potenční množina)*
6. $\bigcup a = \{x : (\exists t)\ x \in t \wedge t \in a\}$ *(suma množiny)*
7. $\bigcap a = \{x : (\forall t) t \in a \Rightarrow x \in t\}$, *je-li* $a \neq \emptyset$ *(průnik množiny)*
jsou množiny.

Definice. (relace) *Nechť a, b jsou množiny, pak libovolná podmnožina $a \times b$ je relace. Relací na a rozumíme podmnožinu množiny $a \times a$. Je-li $(x, y) \in R$, $R \subseteq a \times b$, pak x, y jsou v relaci R a značíme krátce xRy.*

Definiční obor relace je $\operatorname{dom} R = \{x : (\exists y)\ xRy\}$.
Obor hodnot relace je $\operatorname{rng} R = \{y : (\exists x)\ xRy\}$.
Inverzní relace k relaci R je relace $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$.

Definice. (funkce) *Funkce $f : a \to b$ je taková relace $f \subseteq a \times b$, že*

$$(\forall x \in a)(\exists! y \in b)(x, y) \in f.$$

Můžeme proto použít značení $f(x) = y$.

Definice. *Nechť $f : a \to b$ je funkce. Pak*
f je prostá (injektivní), pokud f^{-1} je funkce,
f je na (surjektivní), pokud $\operatorname{rng} f = b$,
f je bijekce, pokud je prostá a na.

Definice. *Nechť a, b jsou množiny. Řekneme, že mohutnost a je menší nebo rovna mohutnosti b, značíme $a \preccurlyeq b$, pokud existuje prostá funkce z a do b. Řekneme, že a má stejnou mohutnost jako b, značíme $a \approx b$, pokud existuje bijekce mezi a a b. Je-li $a \preccurlyeq b$ a není $a \approx b$, pak píšeme $a \prec b$.*

Věta. $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$.

Věta. (Cantor-Bernstein) $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \Rightarrow x \approx y$.

Věta. (Cantor) $x \prec \mathcal{P}(x)$.

Definice. *Množina a je konečná, pokud $a \prec \mathbb{N}$, spočetná, pokud $a \preccurlyeq \mathbb{N}$ a nespočetná, pokud $a \succ \mathbb{N}$.*

Ordinální čísla

Definice. (uspořádání) *Relace R na a je ostré uspořádání, pokud je*
(i) antireflexivní: $(\forall x \in a)\ (x, x) \notin R$,
(ii) tranzitivní: $(\forall x, y, z \in a)\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.
Pokud jsou každé dva prvky porovnatelné, tj. pro každé x, $y \in a$ nastává právě jedna z možností xRy, yRx, $x = y$, pak je uspořádání lineární.

Definice. (nejmenší prvek) *Nechť R je uspořádání na a, $m \subseteq a$, $x \in a$. Pak x je R-nejmenší prvek množiny m, pokud $x \in m$ a $(\forall y \in m)\ x = y \vee xRy$.*

Definice. (dobré uspořádání) *Ostré uspořádání na a je dobré, pokud každá neprázdná množina má R-nejmenší prvek.*

Definice. (uspořádaná množina) *Nechť a je množina, R je uspořádání na a. Pak dvojice (a, R) je uspořádaná množina.*

Lemma. *Je-li (a, R) dobře uspořádaná množina, pak je uspořádaná lineárně.*

Definice. *Množina x je tranzitivní, pokud každý její prvek je její podmnožinou. Ekvivalentně, je-li $s \in t \in x$, pak $s \in x$.*

Definice. (ordinál) *Množina je ordinál, pokud je tranzitivní a dobře uspořádaná relací $\in$.*

Značení: Ordinály se často značí malými řeckými písmeny. Třídu všech ordinálů značíme On. Místo $\alpha \in \beta$ někdy píšeme $\alpha < \beta$ a místo $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ píšeme $\alpha \leq \beta$.

Definice. (ordinální následník) *Ordinální následník ordinálu α je množina*

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Lemma. *Je-li α ordinál, pak $S(\alpha)$ je ordinál a $\alpha < S(\alpha)$.*

Definice. *Ordinál α je izolovaný, pokud $\alpha = \emptyset$ nebo pokud má „předchůdce“, tj. pokud existuje ordinál β takový, že $\alpha = S(\beta)$. Ordinál je limitní, pokud není izolovaný.*

Definice. (přirozené číslo) *Ordinál α je přirozené číslo, pokud je izolovaný a každý menší ordinál je také izolovaný.*

Označení: $0 = \emptyset$, $1 = S(0) = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = S(1) = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ...

Věta. *Třída $\omega = \{n : n$ je přirozené číslo$\}$ je množina všech přirozených čísel.*

Lemma. *Každá neprázdná množina ordinálů má $\in$-nejmenší prvek.*

Lemma. *ω je limitní ordinál.*

Věta. (o transfinitní indukci) *Každá neprázdná třída ordinálů má $\in$-nejmenší prvek.*

Důsledek. Nechť $\varphi(x)$ je formule s volnou proměnnou x taková, že
(i) $\varphi(0)$,
(ii) pro každý ordinál α platí implikace $[(\forall \beta < \alpha)\ \varphi(\beta)] \Rightarrow \varphi(\alpha)$.
Potom $\varphi(\alpha)$ platí pro každý ordinál α.

Definice. (izomorfizmus) *Nechť (a, R), (b, S) jsou ostře uspořádané množiny. Pak (a, R) je izomorfní s (b, S), značíme $(a, R) \simeq (b, S)$, právě tehdy, když existuje bijekce $f : a \to b$ taková, že $(\forall x, y \in a)\ xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y)$.*

Věta. *Každá dobře uspořádaná množina je izomorfní s právě jedním ordinálem. Tomuto ordinálu se říká typ množiny.*

Kardinální čísla

Definice. (mohutnost) *Nechť a je množina, na které existuje dobré uspořádání. Pak mohutnost a je nejmenší ordinál α takový, že $\alpha \approx a$. Značíme ho $|a|$.*

Definice. (kardinál) *Kardinál je takový ordinál $\varkappa$, že $|\varkappa| = \varkappa$.*

Třídu všech kardinálů značíme Cn.