Teorie množin

Pavel Podbrdský

V matematice se s pojmem *množina* setkáváte na každém kroku. Jistě jste obeznámeni s pojmem množiny všech přirozených čísel, množiny všech bodů v rovině, ... Cílem této přednášky bude studovat pojem množiny obecně a ukázat, jaké zajímavé problémy to přináší.

Co to je množina

Někdy v minulém století vznikla potřeba precizovat pojem množiny. Od G. Cantora pochází následující definice:

Definice. (Cantor) *Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů m našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku M.*

Není to definice v pravém slova smyslu, používá dalších pojmů („souhrn“, „celek“ ...), které nejsou o nic jasnější, než pojem „množina“. Je spíše intuitivním vyjádřením toho, co by množiny měly být.

Na této definici je založena tzv. *naivní teorie množin.* Záhy se v ní ale objevily různé „paradoxy“[4], my si zde ukážeme dva.

Paradox. Uvažujme množinu R všech přirozených čísel, které lze nadefinovat posloupností nejvýše třiceti českých slov. Správná definice je například „Sedm“, „Šestá mocnina čísla tři“, „Nejmenší prvočíslo větší než deset na stou“, a podobně. Snadno se ověří, že možných definic je pouze konečně mnoho a tedy R je konečná. Má tedy největší prvek. Můžeme tedy definovat číslo pomocí definice „Číslo o jedničku větší, než největší číslo množiny R všech čísel, které lze nadefinovat nejvýše třiceti českými slovy“. Leží právě nadefinované číslo v množině R?

Paradox. (Russelův) Podle Cantorovy definice je množina předmětem našeho nazírání a tedy můžeme všechny množiny shrnout do jediného celku – množiny všech množin. O každé množině můžeme rozhodnout, zda je, nebo není svým prvkem, znovu podle Cantorovy definice dostaneme existenci množiny $t = \{x : x \notin x\}$, tedy množiny všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem. Ptejme se, zda $t \in t$. Pokud ano, musí mít t vlastnost, která charakterizuje její prvky, tedy dostáváme $t \notin t$. Pokud ne,

[4] Ve skutečnosti vždy šlo o jasný spor v nově zavedené teorii, ale doba byla pro Cantora příznivá, a tak to nazývala paradoxy.

pak zjevně $t \notin t$, tedy t má vlastnost, která charakterizuje její prvky, dostáváme tedy $t \in t$.

Jak jste si jistě všimli, právě jsme dokázali $t \in t \Leftrightarrow t \notin t$, což je zjevný spor.

Bylo jasné, že tyto „paradoxy“ je potřeba odstranit.

Axiomatická teorie množin

Ukázalo se, že správná cesta je v axiomatizaci teorie množin. Budeme se dále pohybovat ve světě množin. V tomto světě *neexistuje nic jiného než množiny*. Ptáte se co je to množina? Všechno, co existuje, je množina. Dále v tomto světě budeme znát symbol $\in$ (náležení). Pro každé dvě množiny $x,\ y$ bude platit buď $x \in y$, nebo $x \notin y$. V prvním případě budeme říkat „x je prvkem y“, v druhém případě „x není prvkem y“. Jak vidíte, prvky množiny jsou zase jen nějaké další množiny[5]. Dále musíme zavést nějaké axiomy, které vyjadřují naší představu o množinovém univerzu a z nich pak budeme odvozovat všechna tvrzení pomocí přísných logických pravidel[6]. Nebudu zde axiomy vypisovat, protože je na přednášce nebudeme příliš zkoumat, jenom zmíním, že axiomy zaručují uzavřenost množinového univerza na základní množinové operace (viz následující definice).

Aplikace teorie množin

Dále se již budeme zabývat některými užitečnými postupy v teorii množin.

Definice. (Základní operace na množinách) *Nechť a, b jsou množiny, pak*

(1) $a \cup b = \{x : x \in a \vee x \in b\}$ *(sjednocení dvou množin).*
(2) $a \cap b = \{x : x \in a \wedge x \in b\}$ *(průnik dvou množin).*
(3) $\mathcal{P}(a) = \{x : x \subseteq a\}$ *(potenční množina – množina všech podmnožin a).*
(4) $\bigcup a = \{x : (\exists t)(t \in a \wedge x \in t)\}$ *(suma – sjednocení všech prvků a).*
(5) $a \times b = \{(x, y) : x \in a \wedge y \in b\}$ *(kartézský součin).*
(6) ${}^a b = \{f | f : a \to b$ *je funkce*$\}$.

Věta. *Neexistuje „množina všech množin“. Tedy neexistuje množina v, která by splňovala $(\forall x)(x \in v)$.*

Definice. (Přirozená čísla v teorii množin) *Definujeme $0 = \emptyset = \{\}$. Dále definujeme $n + 1 = n \cup \{n\}$. Množinu $\{0,\ 1,\ 2,\ \dots\ \}$ značíme ω a množinu $\{1,\ 2, \dots\}$ značíme $\mathbb{N}$.*

[5] Žádné hruštičky, nebo jablíčka nepřipadají v úvahu.

[6] Není účelem zde budovat logiku, odkazuji zde tedy na příspěvek Evy Špačkové.

Poznámka. Tato definice není úplně korektní (zkus se zamyslet proč). Na přednášce si řekneme, jak je to ve skutečnosti. Snadno zjistíme, že přirozené číslo n je množina, která obsahuje právě n prvků (a to všechna menší přirozená čísla včetně nuly).

Definice. (Relace) *Relací na množině a rozumíme libovolnou podmnožinu $R \subseteq a \times a$. Relace nám určuje jistý „vztah“ mezi prvky množiny a. skutečnost $(x, y) \in R$ zapisujeme kratčeji xRy a říkáme, že prvky x, y množiny a jsou v relaci R.*

Příklad. Například „být rovnoběžný“ je relace na množině všech přímek v rovině, „je menší, než“ je relace na přirozených číslech. Mají tyto relace nějaké zvláštní vlastnosti?

Definice. (Lineární uspořádání) *Relaci R na množině a nazveme lineárním uspořádáním, pokud*

(1) *pro každé $x,\ y \in a$ nastává právě jedna z možností xRy, yRx, $x = y$.*
(2) *pro každé $x,\ y,\ z \in a$ platí $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.*

Příklad. Lineárním uspořádáním je například relace $<$ („je menší, než“) na množinách $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Liší se nějak vlastnosti tohoto uspořádání na jednotlivých množinách?

Definice. (Dobré uspořádání) *Lineární uspořádání R na množině a nazveme dobré uspořádání, pokud každá podmnožina $b \subseteq a$ má $R-$nejmenší prvek.*

Cvičení. Na kterých, ze čtyř uvedených množin v minulém příkladu, je $<$ dobré uspořádání?

Porovnávání velikostí množin

Jak vlastně porovnáváme velikosti dvou množin. U konečných množin lze postupovat tak, že spočítáme jejich prvky a porovnáme výsledek. Co když jsou ale množiny nekonečné? Zjišťujeme, že existuje efektivnější způsob porovnávání velikostí množin, který není vázán na konečnost počtu jejich prvků.

Definice. *Řekneme, že množina x nemá větší mohutnost, než y (značíme $x \preccurlyeq y$), pokud existuje prosté zobrazení z x do y. Řekneme, že množiny x, y jsou stejně mohutné (značíme $x \approx y$), pokud existuje bijekce mezi x a y. Řekneme, že x má menší mohutnost, než y (značíme $x \prec y$), pokud existuje prosté zobrazení z x do y, ale neexistuje bijekce mezi x a y.*

Cvičení. Na přednášce ukážeme, že $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$, což může být na první pohled překvapivé. Ukážeme také, že $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Definice. *Množinu a nazveme konečnou, pokud $a \prec \mathbb{N}$, spočetnou, pokud $a \approx \mathbb{N}$ a nespočetnou, pokud $a \succ \mathbb{N}$.*

Následující dvě tvrzení se mohou zdát na první pohled samozřejmá a pro konečné množiny jsou opravdu jednoduchá, ale pro nekonečné množiny jsou důležitá.

Věta. (Cantor – Bernstein)

$$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow (a \approx b).$$

Věta. (Cantor)

$$a \prec \mathcal{P}(a).$$

Další text se bude ubírat k myšlence zobecnění pojmu přirozeného čísla, což lze provést dvěma směry.

Ordinální čísla jako typy dobrých uspořádání

Každá konečná dobře uspořádaná množina „vypadá stejně“ (vzhledem ke svému uspořádání), jako nějaké přirozené číslo. Přirozená čísla lze přirozeným způsobem rozšířit na ordinální čísla tak, že každá dobře uspořádaná množina bude isomorfní s právě jedním ordinálem.

Definice. (Ordinální číslo) *Množinu a nazveme ordinálním číslem (ordinálem), pokud $\in$ je dobré uspořádání na a a pokud pro každé x platí $x \in a \Rightarrow x \subseteq a$. „Třídu“ všech odrinálních čísel (pozor, není to množina!) budeme značit On.*

Pozorování. Snadno zjistíme, že všechny prvky ω (tedy přirozená čísla s nulou) jsou ordinály a také ω je ordinál.

Věta. *Relace $\in$ je dobré uspořádání na On.*

Poznámka. Ordinály budeme většinou značit malými řeckými písmeny a místo $\alpha \in \beta$ budeme často psát prostě $\alpha < \beta$.

Věta. (Transfinitní indukce) *Buď $C \subseteq On$ třída, pro kterou platí*

(1) $0 \in C$,
(2) *Je-li α ordinál, pak $(\beta < \alpha \Rightarrow \beta \in C) \Rightarrow \alpha \in C$,*

pak $C = On$.

Tato věta je silným důkazovým prostředkem spolu s tzv. axiomem výběru, což je následující tvrzení:

Tvrzení. (Axiom výběru) Buď a množina, která neobsahuje prázdnou množinu, jako svůj prvek. Pak existuje funkce f definovaná na a taková, že kdykoliv je $x \in a$, pak $f(x) \in x$.

Axiom výběru je ekvivalentní spoustě zajímavých tvrzení. Je-li množina a konečná, není těžké ho dokázat. Pro nekonečné množiny a již však z axiomů teorie množin dokázat nelze (nelze dokázat ani jeho negace). Jeho použití spolu s transfinitní indukcí si ukážeme na příkladech.

Kardinální čísla jako typy mohutností

Snadno zjistíme, že $0 \prec 1 \prec 2 \prec \cdots \prec \omega$. Dále však existuje dlouhý úsek ordinálních čísel, které mají stejnou mohutnost, jako ω (jsou spočetné). Je přirozené reprezentovat mohutnost všech spočetných množin nejmenším spočetným ordinálem. Tuto myšlenku lze zobecnit.

Definice. (Kardinální číslo) *Kardinálním číslem nazveme každý ordinál α, který je nejmenší ze všech ordinálů, jež mají stejnou mohutnost, jako α. Třídu všech kardinálních čísel značíme Cn.*

Na přednášce si ještě ukážeme (pokud se k tomu dostaneme), jak lze na ordinálních a kardinálních číslech zavést operace sčítání a násobení a jaké mají vlastnosti.

Literatura. Vřele mohu doporučit knihu Balcar, Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, 1986