# Teorie množin

*Martin Tancer*

## Úvod

Hlavní náplní této přednášky bude (jak název napovídá) povídání o množinách a jejich vlastnostech. Určitě už víš, co množina je. Na přednášce si ukážeme, že intuitivní pohled na pojem množiny může dost často selhat a vede k mnoha paradoxům. Naznačíme, jak se dá těmto paradoxům vyhnout. Posléze se budeme zabývat velikostmi množin, ukážeme si například, že existují různě velká nekonečna.

## Intuitivní pojem množiny

Nejprve si zmíníme intuitivní pojem množiny a ukážeme si, co je na něm špatné. Intuitivně je množina souhrn nějakých prvků, které do ní patří (například množina přirozených čísel, množina organizátorů prasátka nebo prázdná množina).

**Paradox.** Jak vypadá množina $A$ definovaná jako množina všech čísel, které lze popsat nejvýše dvaceti českými slovy? Množina $A$ je určitě konečná, protože českých slov je konečně mnoho, tedy má maximální prvek. Patří do množiny $A$ číslo definované jako „největší prvek množiny čísel sestávající z prvků, které lze popsat dvaceti českými slovy, zvýšený o jedna“? Všimni si, že jsme pro popis tohoto prvku použili jen 16 slov, což je méně než dvacet.

**Paradox.** Jak vypadá množina všech množin, které neobsahují sebe sama? Obsahuje sebe sama, nebo ne?

**Paradox.** Jak vypadá množina všech podmnožin množiny všech množin?

## Přesnější pojem množiny

Jak je vidět z předcházejících paradoxů, intuitivní pojem množiny má určité nedostatky. Objevují se v něm množiny, které nejsou příliš dobře definované. Proto se matematikové začali zabývat tím, jak tyto nedostatky odstranit, jak přesněji říci, co je to množina.

Tyto snahy vyústily v takzvanou axiomatickou definici množiny. Základním principem této axiomatizace je, že nepoužívá žádný přirozený jazyk, nýbrž jen výrazy z matematické logiky. Přirozený jazyk je totiž často nejednoznačný nebo zavádějící. Princip axiomatizace spočívá v tom, že se vyjmenují nějaké vlastnosti (axiomy), pomocí nichž lze získat množinu, a objekty získané jiným způsobem

se za množiny nepovažují. Nezískáme tak například množinu všech množin, které neobsahují sebe sama.

Do axiomatické definice se v tomto příspěvku pouštět nebudeme, nicméně na přednášce si určitě řekneme o něco více.

## Velikosti množin

Nyní už přejdeme k matematickým pojmům a budeme si povídat o velikostech množin. Našim hlavním cílem bude získat různě velké nekonečné množiny a naučit se tato nekonečna porovnávat, popř. zjišťovat o nich různé zajímavé výsledky. Na přednášce si řekneme motivaci, ve sborníčku zmíníme především definice a tvrzení.

**Definice.** *Nechť $A$, $B$ jsou množiny, jejich* kartézským součinem *rozumíme množinu $A \times B$ definovanou jako množinu dvojic $(a, b)$, kde $a \in A$ a $b \in B$.*

**Definice.** *Nechť $A$, $B$ jsou množiny.* Funkcí *$f$ z $A$ do $B$ rozumíme podmnožinu $A \times B$ takovou, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $f(a) \in B$, že $(a, f(a))$ patří do této podmnožiny. Méně formálně řečeno: Každému $a$ z $A$ přiřadíme právě jednu funkční hodnotu $f(a)$ z $B$.*

**Definice.** *Funkci $f$ z $A$ do $B$ nazveme*

(i) prostou, *právě když platí $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.*
(ii) surjektivní*(„na“), právě když pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$, že $b = f(a)$.*
(iii) bijekcí, *právě když je prostá a surjektivní.*

**Definice.** *Řekneme, že* velikost množiny $A$ je menší rovna velikosti množiny $B$, *značíme $A \preccurlyeq B$, právě když existuje prostá funkce z $A$ do $B$. Ekvivalentně, existuje surjektivní funkce z $B$ do $A$.*

**Definice.** *Řekneme, že $A$* a *$B$* jsou stejně veliké, *právě když existuje bijekce z $A$ do $B$, značíme $A \approx B$. Dále používejme značení $A \prec B$ v případě, že $A \preccurlyeq B$, ale neplatí $A \approx B$.*

Následující věta vypadá velmi intuitivně, nicméně její důkaz není tak jednoduchý, jak by se na první pohled mohlo zdát.

**Věta.** (Cantor-Berstein) *Jsou-li $A$ a $B$ množiny splňující $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq A$, potom $A \approx B$.*

**Definice.** *Značme*

(1) $\mathbb{N}$ *množinu přirozených čísel.*
(2) $\mathbb{Z}$ *množinu celých čísel.*
(3) $\mathbb{Q}$ *množinu racionálních čísel.*
(4) $\mathbb{R}$ *množinu reálných čísel.*

**Definice.** *Je-li taková $A$ množina, že $A \preccurlyeq \mathbb{N}$, potom $A$ nazveme* spočetnou. *Ostatním množinám říkáme* nespočetné.

**Věta.** $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$

**Věta.** (Cantor) $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

**Věta.** *Je-li $A$ nekonečná, potom $A \times A \approx A$.*

**Definice.** *Značme*

(1) 2 *množinu* $\{0, 1\}$.
(2) $\mathcal{P}(A)$ *množinu podmnožin množiny $A$.*
(3) $A^B$ *množinu všech funkcí z $B$ do $A$.*

Všimni si, že $A \times A$ je přirozeně ztotožnitelné s $A^2$ a dále $\mathcal{P}(A)$ je přirozeně ztotožnitelné s $2^A$.

**Věta.** $\mathcal{P}(A) \succ A$.

**Věta.** $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$.

### Ještě jedna zajímavost

Z počítání s množinami na přednášce bude patrné, že koule o poloměru jedna je nekonečná množina a je stejně veliká jako množina sestávající ze dvou koulí o témže poloměru jedna. Následující paradoxní věta ukazuje, že ve světě matematiky se stále objevují tvrzení, nad kterými zůstává rozum stát.

**Věta.** (Banach, Tarski) *Kouli o poloměru* 1 *je možno rozdělit na konečně mnoho množin takových, že pouhým posouváním a otáčením těchto množin lze získat dvě koule o poloměru* 1.

### Příklady

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda lze $\mathbb{R}$ rozdělit na nespočetně mnoho nespočetných množin.

**Příklad 2.** Dokažte, že platí $A^{B \times C} \approx (A^B)^C$.

**Příklad 3.** Rozhodněte, jestli $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \succ \mathbb{R}$.

**Příklad 4.** Dokažte, že existuje funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která na každém intervalu nabývá všech reálných hodnot.