Teorie her

Alča Skálová

Co je teorie her?

Hrou rozumíme jakoukoliv konfliktní situaci dvou a více hráčů, ve které každý hráč ovlivňuje výsledek. Patří sem jak klasické hry (šachy, člověče nezlob se), tak i situace, které se hrám, jak je známe, vůbec nepodobají (firmy na trhu si navzájem konkurují, zvířata soupeří o zdroj potravy nebo teritorium, …). Konfliktní neznamená nutně, že hráči hrají proti sobě (takzvaný antagonostický konflikt), ale pouze to, že se navzájem ovlivňují.

Teorie her se zjednodušeně řečeno zabývá tím, jak má hráč hrát, aby vyhrál (případně prohrál co nejméně).

Abychom mohli povědět, jak se má hráč zachovat, aby co nejvíce získal, potřebuje vědět, co je pro něj podstatné. Protože v matematice se špatně pracuje s hodnocením „vyhrát dvě hrušky je o trochu lepší, než jedno jablko, a o hodně lepší, než vyhrát kokos“, ohodnotíme si všechny možné výsledné situace reálnými čísly tak, aby výhodnější situace měla větší číslo než méně výhodná. Například pokud by se jednalo o sázky, mohli bychom za tato čísla vzít přímo počet vyhraných nebo prohraných korun.

Pár pojmů

(1) *hráč* – účastník hry.
(2) *strategie* – předpis pro hráče, jak se zachovat. Každý hráč může mít celou *množinu strategií*, samozřejmě klidně jiných než soupeři.
(3) *optimální strategie* – strategie, která hráči přinese největší zisk.
(4) *výplatní funkce* – udává zisk nebo ztrátu[2] konkrétního hráče. Závisí na zvolených strategiích všech hráčů.
(5) *racionální hráč* – chová se tak, aby dopadl co nejlépe. Obecně hráči inteligentní být nemusí a mohou se rozhodovat např. na principu náhody.
(6) *hra s úplnou/neúplnou informací* – velmi důležité je také, zda mají hráči veškeré dostupné informace ve hře, či jen část, nebo dokonce žádné. Případně vědí-li, že i ostatní vědí. Viz první příklad.
(7) *kooperativní/nekooperativní hra* – v kooperativní hře se hráči mohou předem domlouvat, případně se dělit o zisky. V nekooperativní hře nesmějí ani jedno.

[2] Ztráta je vlastně jen zisk s minusem. `(-;`

Příklad 1. Dva hráči, Xenie a Yetti, hrají následující hru. Oba si nezávisle na sobě vyberou přirozené číslo od 1 do 10, napíší je na papírek a poté své volby zveřejní. Je-li součet obou sudý, dostane Xenie od Yettiho korunu, v opačném případě mu korunu dá ona.

(1) Jakou strategii Yettimu poradíte, aby nebyl oškubán? (hraje se nekonečně krát)
(2) Jak se hra/strategie změní, pokud Xenie smí vybírat pouze sudá čísla a Yetti to neví? (hraje se jednou)
(3) Jak se hra/strategie změní, pokud Xenie smí vybírat pouze sudá čísla a Yetti to ví? (-: (hraje se jednou)

Hry v explicitním tvaru

Jsou hry, ve kterých se hráči střídají ve volbě strategií, předpokládá se, že všichni hráči jsou racionální. K těmto hrám teoreticky[3] lze nakreslit „rozhodovací strom", což je graf, jehož uzly jsou stavy, ve kterých se hra může nacházet, a hrany jsou možné tahy hráčů.

Příklad 2. Tři zákonodárci hlasují o tom, mají-li si zvýšit platy. Všichni tři si zvýšení přejí, ale hlasování je veřejné, takže toho, kdo bude hlasovat pro, čeká ztráta obliby u voličů v hodnotě c. Prospěch ze zvýšení platu je b, $b > c$. Hlasují-li postupně a otevřeně, je lepší volit jako první, nebo jako poslední?

Hry v normálním tvaru

Jsou hry, kde každý hráč má na výběr jen konečně strategií. Všechny možné výsledky je tedy možné zapsat do (vícerozměrné) tabulky. My se budeme zabývat jen hrami dvou hráčů, takovým se říká *dvojmaticové*. Prvně ještě dvě definice:

Definice. *Nechť je dána neprázdná n-prvková množina $Q = \{1, 2, \dots, n\}$, n množin $S_1, S_2, \dots, S_n$ a n reálných funkcí $u_1, u_2, \dots, u_n$ definovaných na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.* Hrou n hráčů v normálním tvaru (HNT) *budeme rozumět uspořádanou $(2n+1)$-tici*

$$(Q; S_1, S_2, \dots, S_n; u_1(s_1, \dots, s_n), \dots, u_n(s_1, \dots, s_n)).$$

Množinu Q nazveme množinou hráčů, *množinu S_i nazveme* prostorem strategií *hráče i a funkci $u_i(s_1, \dots, s_n)$ nazveme* výplatní funkcí hráče i. *Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o* zisku, *je-li záporná, hovoříme o* ztrátě.

[3]Teoreticky proto, že například pro šachy by graf dosahoval obřích rozměrů a pro praktické účely by byla nutná optimalizace.

Definice. *Dvojice strategií* (s^*, t^*) *se nazývá* rovnovážný bod, *právě když platí:*

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \qquad \textit{pro každé } s \in S$$

a zároveň

$$u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*) \qquad \textit{pro každé } t \in T.$$

Neboli rovnovážný bod je taková dvojice strategií, u které se ani jednomu hráči nevyplatí jednostranné odchýlení. Rovnovážný bod nemusí být vždy optimálním řešením (viz příklad 5). A v ryzích strategiích nemusí dokonce ani existovat (příklad 1.1), nebo jich může existovat víc (příklad 6). Pokud ale povolíme tzv. *smíšené strategie*[4], pak rovnovážný bod vždy existuje.[5]

Příklad 3. Dvě firmy se uchází o dvě stavební zakázky vypsané jedním úřadem, velkou (za 15 milionů) a malou (za 9 milionů). Firma v obálce pošle, zda si přeje pracovat sama na velké, sama na malé nebo spolupracovat na obou. Úředník poté rozdělí zakázky podle následujících pravidel:

(1) Pokud o nějakou zakázku projevila zájem pouze jedna firma, dostane ji celou.
(2) Pokud obě firmy projeví zájem o stejnou zakázku a o druhou žádná, budou kooperovat na obou a rozdělí se rovným dílem. Stejně tak nabízejí-li obě spolupráci.
(3) Pokud se jedna z firem uchází pouze o jednu zakázku a druhá nabízí kooperaci na obou, získá firma, která nabízí realizaci celé stavby 60% a druhá 40%, jde-li o velkou stavbu. Jde-li o malou, získá firma, která nabízí celou realizaci 80% a druhá 20%. Na zbývající zakázce si zisky dělí napůl.

Co poradíte majiteli?

Příklad 4. V chlívku žijí dvě prasátka, tlusté a malé. Na jedné straně chlívku je páčka, po jejímž zmáčknutí se trochu naplní korýtko na druhé straně chlívku. Malé prasátko nemá dost sil tlusté prasátko od korýtka odstrčit, kdežto tlusté prasátko odstrčí malé bez problémů. Zisky z jednotlivých strategií zachycuje následující tabulka. Tlusté prasátko volí řádky, jeho zisky jsou první čísla. Malé prasátko volí sloupce a jeho zisky jsou druhá čísla.

Kdo tedy bude sedět u koryta a kdo běhat a mačkat?

strategie	stiskni páku	seď u koryta
stiskni páku	$(8, -2)$	$(5, 3)$
seď u koryta	$(10, -2)$	$(0, 0)$

[4] Strategie, které pomocí pravděpodobnosti kombinují původní ryzí strategie.

[5] Existenci rovnovážného bodu ve smíšených strategiích dokázal roku 1951 J. F. Nash, tzv. *Nashova rovnováha*.

Příklad 5. (Vězňovo dilema) Policie zatkla Ignáce a Gustava a vyslýchá je o samotě tak, aby se nemohli domluvit. Pokud budou oba zapírat, dostane každý dva roky za menší prohřešky, které jim policie umí prokázat. Pokud jeden druhého udá a druhý bude mlčet, dostane udavač pouze 1 rok a druhý dostane 10 let. Pokud se oba udají navzájem, dostanou po pěti letech. Co je optimálním řešením této situace a jaký je rovnovážný bod?

Příklad 6. (Manželské dilema) Manželé se rozhodují, kam večer půjdou. Žena by ráda na box, kdežto muž do opery. Oba ale budou spokojenější, když budou spolu, než když bude každý jinde, viz tabulka (žena volí sloupce, muž řádky). Jak byste jim poradili, nesmějí-li se předem domlouvat?

strategie	box	opera
box	$(1,2)$	$(0,0)$
opera	$(0,0)$	$(2,1)$

Speciálním případem her v normálním tvaru je *antagonistický konflikt dvou hráčů*. Oba hráči hrají přímo proti sobě a zisk jednoho se rovná ztrátě druhého. Vyznačuje se tím, že příslušná matice má konstantní součet v každém poli. Proto se těmto hrám říká rovněž *s konstantním součtem*. Takové hry jsou nutně nekooperativní. Patří sem příklady 1, 3 a 4.

Závěr

Teorie her původně vznikla zejména pro modelování situací v ekonomii (slavný matematik *John Forbes Nash* získal Nobelovu cenu za ekonomii v roce 1994 právě za výzkum v teorii her), ovšem velmi dobré uplatnění nalezla jak v evoluční biologii, tak ve spoustě dalších oborů. Je to velmi bohatá disciplína a toto byla jen malá ukázka. Pokud bys chtěl/a vědět víc, můžeš začít třeba s knížkou [2]. Je psaná zejména pro biology, tedy se nemusíš bát, že by v ní matematika byla vysvětlována příliš složitě.

Literatura a zdroje

[1] přednáška RNDr. Magdaleny Hykšové, Ph.D. na MFF UK, zimní semestr 2010/2011: *Teorie her.*

[2] John Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982.

[3] Miroslav Maňas: *Teorie her a optimální rozhodování*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1974.