Teorie grafů

Šárka Štěpánová

V této přednášce bych ráda ukázala čím vším se tato teorie zabývá, nebudeme tedy zabíhat do detailů a hlubokých výsledků. Následují definice (ne všechny budeme na přednášce potřebovat) a lemmata a věty (ne všechny budeme na přednášce dokazovat).

Základní definice

Definice. *Graf G (obyčejný neorientovaný) je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$.*

Definice. *Podgraf $G' = (V', E')$ grafu $G = (V, E)$: G' je graf, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.*

Definice. *Cesta (délky n) v grafu je podgraf: $V = \{1, \ldots, n+1\}$, $E = \{\{i, i+1\}; i = 1, \ldots, n\}$.*

Definice. *Kružnice (délky n) v grafu je podgraf: $V = \{1, \ldots, n\}, E = \{\{i, i+1\}; i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{1, n\}$.*

Definice. *Párování E': $E' \subseteq E$, $\forall e_1,\ e_2 \in E'$ $e \cap e' = \emptyset$. Maximální párování: $|E'|$ je maximální.*

Definice. *Grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou stejné (izomorfní) pokud existuje zobrazení $f : V \longrightarrow V'$ prosté a na tak, že $\{x, y\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(x), f(y)\} \in E'$.*

Speciální grafy

- Úplný graf K_n: $V = \{1, \ldots, n\}, E = \binom{V}{2}$.
- Bipartitní graf: Existují neprázdné V_1, V_2 tak, že $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
- Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$: $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}$, $E = \{\{u_i, v_j\} : i = 1, \ldots, n,\ v = 1, \ldots, m\}$.

Jiné typy grafů

- Neorientovaný se smyčkami: $E \subseteq \binom{V}{2} \cup \triangle_V = \{\{x,y\}:\ x,y \in V\}$.
- Obyčejný orientovaný: $E \subseteq V \times V \setminus \triangle_V = \{(x,y):\ x,y \in V,\ x \neq y\}$.
- Orientovaný se smyčkami: $E \subseteq V \times V = \{(x,y):\ x,y \in V\}$.
- Multigraf: Z jednoho vrcholu do jiného může vést i více hran.
- Ohodnocený graf: $G = (V, E, v), v : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Charakteristiky grafu

- Stupeň vrcholu x: $\deg_G x$ je počet hran, jejichž jedním prvkem je x.
- Skóre grafu $G = (V, E),\ V = \{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$: $\deg_G x_1,\ \ldots,\ \deg_G x_n$.

Definice. *Posloupnost je grafová, existuje-li graf, pro který je daná posloupnost skóre.*

Věta. *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí: $\sum_{x \in V} deg_G x = 2 \cdot |E|$.*

Důsledek. Pro každý graf je počet vrcholů lichého stupně sudé číslo.

Věta. *Nechť $s_1,\ \ldots,\ s_n$ je posloupnost přirozených čísel taková, že $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$, $n \geq 2$, $1 \leq s_i \leq n-1$. Tato posloupnost je grafová právě tehdy, když posloupnost $s_2 - 1,\ \ldots,\ s_{s_1+1} - 1,\ s_{s_1+2},\ \ldots,\ s_n$ je grafová.*

Věta. (Ramseyova, speciální případ) *Nechť $|V| \geq 6$. Pak v G existuje trojúhelník nebo 3 nezávislé vrcholy.*

Souvislé grafy

Definice. *Graf G nazveme souvislý, pokud pro každé dva jeho vrcholy x, y existuje sled začínající v x a končící v y.*

Definice. *Sledem rozumíme posloupnost $x_0,\ l_1,\ x_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n,\ x_n$, kde $x_i \in V,\ l_i = \{x_{i-1}, x_i\} \in E$.*

Definice. *Tahem rozumíme sled, pro který navíc platí $l_i \neq l_j$, pro $i \neq j$.*

Definice. *Cestou rozumíme tah pro který navíc platí $x_i \neq x_j$, pro $i \neq j$.*

Definice. *Komponentou souvislosti* grafu G *rozumíme každý jeho maximální souvislý podgraf.*

Lemma. *Graf je souvislý právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.*

Věta. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý. Pak $|E| \geq |V| - 1$.*

Stromy

Definice. *Stromem rozumíme souvislý graf bez kružnic.*

Definice. *Listem rozumíme každý vrchol stupně 1.*

Lemma. *Každý (netriviální) strom má alespoň 2 listy.*

Definice. *Kostra grafu je strom, který je podgrafem se stejnou množinou vrcholů.*

Věta. *Nechť $G = (V, E)$ je strom. Pak $|E| = |V| - 1$.*

Věta. *Pro $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*
(1) *G je strom.*
(2) *Každá dvojice vrcholů v G je spojena právě jednou cestou.*
(3) *G je souvislý a odstraněním libovolné hrany vznikne nesouvislý podgraf.*
(4) *G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany vznikne v grafu G kružnice.*

Rovinné grafy

Definice. *Rovinným grafem rozumíme graf, pro který existuje alespoň jedno jeho nakreslení do roviny, ve kterém se neprotínají žádné jeho dvě hrany.*

Definice. *Stěna grafu je část roviny ohraničená hranami, která je minimální.*

Věta. (Eulerova formule) *Pro každý rovinný graf platí: $|V| - |E| + s(G) = 2$.*

Důsledek. Nechť $|V| \geq 3$. Pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Tedy K_5 není rovinný.

Důsledek. Nechť G neobsahuje trojúhelník a $|V| \geq 3$. Pak $|E| \leq 2|V| - 4$. Tedy $K_{3,3}$ není rovinný.

Důsledek. Každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.

Barevnost grafu

Definice. *Barevnost* $\chi(G)$ *je minimální počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu* G *tak, aby vrcholy spojené hranou měli různou barvu.*

Věta. *Každý rovinný graf má barevnost nejvýše 5.*

Eulerovské a Hamiltonovské grafy

Definice. *Eulerovský graf* je homomorfní obraz kružnice délky $|E|$.

Definice. *Hamiltonovský graf* je obsahuje kružnici délky $|V|$.

Věta. *Graf je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a stupně všech vrcholů jsou sudé.*