Teleskopické součty a součiny

Adéla Kostelecká

Abstrakt. Příspěvek se zabývá metodou teleskopických součtů a součinů. Obsahuje několik příkladů na procvičení této techniky.

Princip teleskopických součtů a součinů je založen na vhodném prodloužení výrazu, který následně upravíme tak, že dostaneme mnohem jednodušší výraz než před „prodloužením“.

Nejprve si ukážeme základní příklady na teleskopické součty. U této metody chceme z každého sčítance udělat rozdíl dvou výrazů, aby se výrazy jednoduše „odečetly“.

Úloha. Určete hodnotu výrazu $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Úloha. Určete hodnotu výrazu $1!\cdot 1+2!\cdot 2+\cdots+n!\cdot n$.

Nyní si ukážeme některé příklady na teleskopické součiny. Zde se podobně snažíme, aby se nám skoro všechno „pokrátilo“ a zůstal nám jednoduchý výraz.

Úloha. Dokažte, že $\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}\right)<2$.

Úloha. Dokažte, že $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

Příklady

Příklad 1. Určete hodnotu výrazu $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

Příklad 2. Dokažte, že platí $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$.

Příklad 3. Dokažte, že $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}<2$.

Příklad 4. Dokažte, že platí $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+3)}<\frac{1}{4}$.

Příklad 5. Dokažte, že platí $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$

Příklad 6. Určete hodnotu $\sqrt{1+1+\dfrac{1}{4}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}.$

Příklad 7. Zjednodušte

$$1!\cdot\left(1^2+1+1\right)+2!\cdot\left(2^2+2+1\right)+\cdots+n!\cdot\left(n^2+n+1\right).$$

Příklad 8. Zjednodušte

$$\frac{1}{(1+1)\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{1+1}}+\frac{1}{(2+1)\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2+1}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}+n\cdot\sqrt{n+1}}.$$

Příklad 9. Dokažte, že

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=\frac{(n+1)^2}{4n}.$$

Příklad 10. Dokažte, že $\dfrac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\dfrac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3+1}{n^3-1}<\dfrac{3}{2}.$

Příklad 11. Určete hodnotu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}.$

Příklad 12. Určete hodnotu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}.$

Literatura a zdroje

[1] Andreescu, Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, 2000.
[2] Jaroslav Švrček: *O teleskopických součtech a součinech*, *https://is.muni.cz/el/1431/jaro2010/MA572/um/didmat2.pdf*