Tabulky a matice

Kuba Svoboda

Abstrakt. Příspěvek seznamuje se základními maticovými operacemi a latinskými čtverci. Dále obsahuje úlohy k oběma tématům.

Podíváme se společně na dva typy příkladů. V jednom budou figurovat matice a v druhém tabulky čísel. V podstatě jde o stejné objekty, ale k maticím se tradičně váže bohatá a významná teorie, jejíž některé základní prvky si ukážeme.

Definice. *Maticí* A typu $n \times m$ budeme rozumět tabulku o n řádcích a m sloupcích vyplněnou čísly (často z nějaké dané množiny).

Definice. (Sčítání matic) Nechť obě matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou typu $n \times m$. *Součet* těchto matic je matice $A + B = C = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro každé i a j.

Definice. (Násobení matic) Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $p \times r$ a $B = (b_{ij})$ je typu $r \times s$. *Součinem* matic rozumíme matici C typu $p \times s$, kde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_{jk}$.

Definice. (Transponování matic) *Transponovanou matici* matice A budeme značit A^T. Je to matice A převrácená podle diagonály. Pokud tedy A je typu $n \times m$ s prvkem a_{ij} na pozici ij, potom je A^T typu $m \times n$ s prvkem a_{ij} na pozici ji.

Definice. (Permutační matice) Matice $n \times n$, která má v každém řádku a sloupci přesně jednu jedničku, se nazývá *permutační matice*.

Latinské čtverce

Definice. *Latinský čtverec* řádu n je matice $n \times n$ s prvky z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a pro každý řádek a sloupec platí, že se tam každé číslo z této množiny vyskytuje právě jednou.

Definice. *Obyčejný čtverec* řádu n je matice $n \times n$ s prvky z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pro obyčejné i latinské čtverce definujeme ortogonalitu.

Definice. O dvou čtvercích řekneme, že jsou *ortogonální*, jestliže

$$(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{kl}, b_{kl}) \Rightarrow (i, j) = (k, l).$$

Úlohy na matice

Úloha 1. Mějme matici $n \times m$ s racionálními prvky. Předpokládejme, že alespoň $m + n$ z nich jsou v absolutní hodnotě různá prvočísla. Dokažte, že hodnost matice je alespoň dva, tedy že existují dva řádky matice, kde jeden není násobek druhého. (Putnam 2015)

Úloha 2. Co se stane, pokud permutační maticí vynásobíme jinou matici? Co když vynásobíme $P_1 P_2 A$, kde P_1 a P_2 jsou permutační matice a A je libovolná matice?

Úloha 3. Mějme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak vypadá n-tá mocnina této matice?

Úloha 4. Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky *EU* musí mít každý klub lichý počet členů, zatímco pro každou dvojici klubů musí být počet lidí, kteří navštěvují oba kluby, sudý. Dokažte, že $m \leq n$.

Úloha 5. Pro jaké $n \in \mathbb{N}$ existuje matice $n \times n$ taková, že AA^T má na diagonále sudá čísla a všude jinde lichá? (Putnam 2011)

Úloha 6. Nechť $||x|| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ pro $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nechť A je reálná matice $n \times n$ splňující $||Ax|| = ||x||$ pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že A^m je I_n pro nějaké kladné m.

Úloha 7. Kombinační číslo pro $k > n$ dodefinujeme jako $\binom{n}{k} = 0$, jinak půjde o známé kombinační číslo. Co když vynásobíme matici A, kde $a_{ij} = \binom{i}{j}$, s maticí B, kde $b_{ij} = \binom{j}{i}$?

Úloha 8. A a B hrají hru, vyplňují matici 2015×2015 různými reálnými čísly. Hráč A začíná a vyhraje, pokud je matice invertovatelná, jinak vyhraje B. Co se stane, pokud ji musejí vyplňovat celými čísly? Co když začíná B? (Putnam 2008)

Úlohy na čtverce

Úloha 9. Mějme čtvercovou tabulku 4×4 vyplněnou reálnými čísly. Součet všech řádků, sloupců a hlavních diagonál je S. Dokažte, že potom i součet čtyř rohových čísel je S. (MKS 28–1–5)

Úloha 10. Dokažte, že existuje množina t navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu n právě tehdy, když existuje množina $t+2$ navzájem ortogonálních obyčejných čtverců řádu n.

Úloha 11. V každém políčku tabulky 111×111 je liché číslo. Označme A součin řádkových součtů a B součin sloupcových součtů. Dokažte, že $A + B \neq 0$.

(MKS 31–5–7)

Úloha 12. Nechť p je prvočíslo a $\mathbb{Z}_p$ je těleso celých čísel modulo p. Definujeme matice $T^1, T^2, \ldots, T^{p-1}$ (horní číslo je index) předpisem $T^a_{i,j} = ai + j$, kde $i, j \in \mathbb{Z}_p$ a sčítání a násobení jsou operace v tělese. Dokažte, že $T^1, \ldots, T^{p-1}$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu p.

Úloha 13. Najděte dva ortogonální latinské čtverce řádu 6.

Úloha 14. Tabulka $n \times n$ je vyplněna čísly 1 až n^2. Dokažte, že existují dvě hranou sousedící políčka taková, že rozdíl čísel v nich napsaných je alespoň n.

(MKS 28–1–8)