

Metoda dokazování symetrických nerovností

Pavel Šalom

Dokazovat nerovnosti je velké umění. Ti z vás, kteří byli letos na celostátní a pozorně si vyslechli projev pana docenta Šimší⁷ o tom určitě ví své. Předně je potřeba říci, že neexistuje žádná dobrá metoda, jak dokazovat všemožné nerovnosti. Pokusíme se však aspoň do některých metod nakouknout, abychom měli v nerovném boji s nerovnostmi šanci. Zároveň bych byl rád, kdyby tato přednáška sloužila jako ochutnávka toho, co byste přibližně mohli čekat od seriálu o nerovnostech, pokud si jej na příští rok vyberete.

Jako první věc je vždy velmi důležité si uvědomit, jaká nerovnost proti vám stojí. Jsou totiž nerovnosti různého typu – nejčastěji jsou to nerovnosti symetrické a cyklické.

Definice. Nerovnost vyjádřená ve tvaru $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ je symetrická, jestliže se při záměně libovolných dvou proměnných nezmění, tj. $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$ a stejně tak při záměně jiných dvou proměnných.

Definice. Nerovnost vyjádřená ve tvaru $f(x_1, \dots, x_n)$ je cyklická, jestliže se nezmění při takzvané cyklické záměně, tj. $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})$

Poznámka. Výraz $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$ je symetrický, zatímco výraz $\frac{a+b}{a} + \frac{b+c}{b} + \frac{c+a}{c}$ je pouze cyklický. Výraz $a^2bc + ab^2c$ není ani symetrický, ani cyklický.

Symetrické nerovnosti jsou tedy velmi speciální. Naše povídání začneme ukázkou příkladu z IMO 2001. Soutěžící tehdy dostali za úkol dokázat nelehkou nerovnost⁸

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Ve vzorovém řešení potom stálo: nejprve dokážeme nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$$

a následným přičtením dvou analogických nerovností dostaneme požadovanou nerovnost. Nikde se ale nepíše, jak přijít na ono magické číslo $4/3$ (jiné číslo v ex-

⁷Pokud jste tam nebyli, doporučuji si na oficiálních stránkách MO jeho projev přečíst – stojí za to. :)

⁸Ve všech úlohách budeme předpokládat, že všechny proměnné jsou kladná reálná čísla, nebude-li náhodou řečeno jinak.