Symetrické (ne)rovnosti v trojúhelníku

Libor Barto

V této přednášce se zaměřím na rovnosti a nerovnosti v trojúhelníku, kde vystupují symetrické funkce některých tří význačných prvků (např. velikosti stran, úhlů, výšek, …). Nejprve krátké připomenutí základních poznatků o symetrických mnohočlenech.

Symetrické mnohočleny

Definice. *Polynom (nebo racionální funkce, tedy podíl dvou polynomů) se nazývá symetrický (resp. symetrická), jestliže se nezmění při libovolné permutaci proměnných. Příklady symetrických polynomů a racionálních funkcí jsou tedy např.* xyz, $\frac{1}{x+y+z}$, …

Symetrický polynom je speciálním případem symetrické racionální funkce. My budeme pracovat výhradně se symetrickým racionálními funkcemi tří proměnných. Lze dokázat, že libovolná symetrická racionální funkce v proměnných x, y, z lze vyjádřit pomocí těchto tří symetrických polynomů:

$$s_1(x, y, z) = x + y + z,$$
$$s_2(x, y, z) = xy + xz + yz,$$
$$s_3(x, y, z) = xyz.$$

Budeme ještě potřebovat následující jednoduché tvrzení.

Věta. (Viètovy vztahy) *Nechť polynom* $a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ *má kořeny* x, y, z. *Potom platí*

$$s_1(x, y, z) = -\frac{a_1}{a_0},$$
$$s_2(x, y, z) = \frac{a_2}{a_0},$$
$$s_3(x, y, z) = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Symetrické rovnosti

Dále budeme pracovat s trojúhelníkem ABC s běžně označenými stranami a úhly. Poloměr kružnice opsané označíme r, poloměr kružnice vepsané označíme ρ, polovinu obvodu označíme p.

Věta. *Délky stran trojúhleníku jsou kořeny polynomu*

$$t^3 - 2pt^2 + (p^2 + \rho^2 + 4r\rho)t - 4pr\rho.$$

Poznámka. Z této věty použitím Viètových vztahů dostaneme vyjádření $s_i(a,b,c)$, $i = 1,2,3$, pomocí p, r, ρ a tedy jsme schopní pomocí p, r, ρ vyjádřit libovolnou symetrickou racionální funkci proměnných a, b, c.

Podobná tvrzení lze dokázat pro mnoho význačných prvků trojúhelníku (často přímo z této věty), např.

Čísla $p-a, p-b, p-c$ jsou kořeny polynomu

$$t^3 - pt^2 + \rho(4r+\rho)t - p\rho^2.$$

Čísla $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ jsou kořeny polynomu

$$4r^2t^3 - 4r(r+\rho)t^2 + (p^2 + \rho^2 - 4r^2)t + (2r+\rho)^2 - p^2.$$

Čísla $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ jsou kořeny polynomu

$$4r^2t^3 - 4prt^2 + (p^2 + \rho^2 + 4r\rho)t - 2p\rho.$$

Čísla $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma$ (žádný úhel nesmí být pravý) jsou kořeny polynomu

$$(p^2 - (2r+\rho)^2)t^3 - 2p\rho t^2 + (p^2 - \rho^2 - r4\rho)t - 2p\rho.$$

Čísla v_a, v_b, v_c (velikosti výšek) jsou kořeny polynomu

$$2rt^3 - (p^2 + \rho^2 + 4r\rho)t^2 + 4p^2\rho t - 4p^2\rho^2.$$

A mnoho dalších ...

Symetrické nerovnosti

Základem bude nerovnost

$$27\rho^2 \le 16r\rho - 5\rho^2 \le p^2 \le 4r^2 + 4r\rho + 3\rho^2 \le \frac{27}{4}r^2,$$

přičemž rovnost nastává pro rovnostranný trojúhelník.

Pomocí této nerovnosti a již nalezených symetrických rovností lze získat nepřeberné množství nerovností, kde na jedné straně vystupuje symetriká racionální funkce některých tří prvků trojúhelníku a na druhé straně proměnné p, r, ρ.