# Švrčkův bod

Martina Vaváčková

Abstrakt. Přednáška shrnuje základní vlastnosti středu oblouku, tzv. Švrčkova bodu. Tento bod figuruje v mnoha geometrických úlohách, a jeho dobrá znalost je tedy pro úspěch při řešení velmi užitečná. To vše ilustruje řada příkladů.

Středem pozornosti naší přednášky bude Švrčkův bod. Podíváme se na něj zblízka a všimneme si některých jeho zajímavých vlastností. Zformulujeme a dokážeme pár užitečných tvrzení, která pak prakticky využijeme při řešení úloh.

## Definice a značení

**Definice.** Nechť je trojúhelník $ABC$ vepsaný do kružnice $\omega$. Střed oblouku $BC$, který neobsahuje $A$, označme $\check{S}_a$ a říkejme mu *Švrčkův bod* trojúhelníka $ABC$ vzhledem k $A$. Body $\check{S}_b$, $\check{S}_c$ definujme analogicky.

**Značení.** V trojúhelníku $ABC$ označme $\omega$ kružnici opsanou, $I$ střed kružnice vepsané, $\check{S}_a$, $\check{S}_b$, $\check{S}_c$ odpovídající Švrčkovy body, $E_a$, $E_b$, $E_c$ odpovídající středy kružnic připsaných a konečně $AD$, $BE$, $CF$ osy úhlů v $\triangle ABC$, kde $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$.

## Základní vlastnosti

**Tvrzení 1.** *V trojúhelníku $ABC$ se osa úhlu $BAC$ a osa strany $BC$ protínají na kružnici $\omega$. Jejich průsečíkem je $\check{S}_a$.*

**Tvrzení 2.** *Body $B$, $C$, $I$, $E_a$ leží na jedné kružnici se středem $\check{S}_a$. Platí tedy $|\check{S}_aI| = |\check{S}_aB| = |\check{S}_aC| = |\check{S}_aE_a|$.*

**Tvrzení 3.** *Bodem $\check{S}_a$ veďme polopřímky $p$ a $q$, které protnou stranu $BC$ postupně v bodech $X$ a $Y$ a kružnici $\omega$ protnou podruhé postupně v $Z$ a $W$. Pak body $X$, $Y$, $Z$, $W$ leží na jedné kružnici.*

**Tvrzení 4.** *V trojúhelníku $ABC$ platí $|\check{S}_aD| \cdot |\check{S}_aA| = |\check{S}_aI|^2 = |\check{S}_aC|^2 = |\check{S}_aB|^2$.*

---

Klíčová slova. planimetrie, trojúhelník, geometrie, Švrčkův bod, osa úhlu, kružnice opsaná

**Tvrzení 5.** *Nechť $X$ je bod na úsečce $AD$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $X = I$.
(ii) $|\check{S}_a X| = |\check{S}_a I|$.
(iii) $|\check{S}_a D| \cdot |\check{S}_a A| = |\check{S}_a X|^2$.

**Tvrzení 6.** *Je dán trojúhelník $ABC$ a kružnice $\omega_1$, která má vnitřní dotyk s kružnicí $\omega$ v bodě $A$ a se stranou $BC$ v bodě $D'$. Pak $D = D'$.*

## Příklady

**Příklad 1.** Je dán trojúhelník $ABC$ se středem kružnice vepsané $I$ a vnitřním bodem $P$. Platí

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Ukažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastává, právě když $P = I$. (IMO 2006)

**Příklad 2.** Nechť $BC$ je průměr kružnice $k$ se středem $O$. Dále buď $A$ bod na $k$ takový, že $\sphericalangle AOB < 120°$, a $D$ buď střed toho oblouku $AB$, který neobsahuje $C$. Rovnoběžka s $DA$ vedená bodem $O$ protne $AC$ v bodě $I$. Osa úsečky $OA$ protne $k$ v bodech $E$ a $F$. Ukažte, že $I$ je středem kružnice vepsané trojúhelníku $CEF$. (IMO 2002)

**Příklad 3.** Kružnice $\omega_1$ a $\omega_2$ mají vnější dotyk v bodě $T$ a obě se vnitřně dotýkají kružnice $\omega$ postupně v bodech $R$ a $S$. Buď $Q$ druhý průsečík $RT$ a $\omega$. Ukažte, že $|\sphericalangle QST| = 90°$. (KMS)

**Příklad 4.** Nechť jsou $AL$ a $BK$ osy úhlů nerovnoramenného trojúhelníka $ABC$ ($L$ leží na straně $BC$, $K$ leží na straně $AC$). Osa úsečky $BK$ protne přímku $AL$ v bodě $M$. Bod $N$ leží na přímce $BK$ a platí, že $LN$ je rovnoběžná s $MK$. Dokažte, že $|LN| = |NA|$. (Junior Balkan 2010)

**Příklad 5.** V trojúhelníku $ABC$ dokažte při zavedeném značení následující metrické vztahy:

(i) $|A\check{S}_a| \cdot |ID| = |\check{S}_a I| \cdot |AI|$,
(ii) $|A\check{S}_a| \cdot |AD| = |AI| \cdot |AE_a| = |AB| \cdot |AC|$,
(iii) $|IA| \cdot |E_a D| = |E_a A| \cdot |ID|$.

**Příklad 6.** Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník ($|AB| \neq |AC|$). Kružnice nad průměrem $BC$ protne strany $AB$ a $AC$ postupně v bodech $M$ a $N$. Označme $O$ střed strany $BC$ a $R$ průsečík os úhlů $BAC$ a $MON$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $BMR$ a $CNR$ se protínají na straně $BC$. (IMO 2004)

**Příklad 7.** Trojúhelník $ABC$ splňuje vztah $|AC| + |BC| = 3|AB|$. Kružnice jemu vepsaná se středem $I$ se dotýká stran $BC$ a $CA$ postupně v bodech $D$ a $E$. Nechť

$K$, $L$ jsou obrazy bodů $D$, $E$ ve středové souměrnosti podle $I$. Ukažte, že body $A$, $B$, $K$ a $L$ leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 2005)

**Příklad 8.** Je dán trojúhelník $ABC$ se středem $I$ kružnice vepsané a kružnicí opsanou $\Gamma$. Přímka $AI$ protne kružnici $\Gamma$ podruhé v bodě $D$. Buď $E$ bod na oblouku $BDC$ a $F$ bod na úsečce $BC$ takový, že $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Dále buď $G$ střed úsečky $IF$. Dokažte, že přímky $EI$ a $DG$ se protínají na kružnici $\Gamma$.

(IMO 2010)

**Příklad 9.** Přímka $\ell$ protíná kružnici $\Gamma$ v bodech $A$, $B$. Kružnice $\Gamma_1$ a $\Gamma_2$ jsou vepsané do stejné úseče určené přímkou $\ell$ a mají vnější dotyk. Dokažte, že jejich vnitřní společná tečna prochází pevným bodem, pohybují-li se $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ ve vymezené úseči. (Prasolov)

**Příklad 10.** Je dán trojúhelník $ABC$, jeho kružnice ospaná $\omega$ a bod $D$ na straně $BC$. Buď $\omega_1$ kružnice dotýkající se úsečky $AD$ v bodě $F$, strany $BC$ bodě $E$ a kružnice $\omega$ v bodě $K$. Dokažte, že střed $I$ kružnice vepsané $\triangle ABC$ leží na přímce $EF$. (Sawayama-Thebault theorem, PraSe 29/myšmaš)

## Literatura a zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec: *The Š point*, *www.onlinemathcircle.com*.