Švrčkův bod

Adéla Karolína Žáčková

Abstrakt. Přednáška uvádí do problematiky Švrčkova bodu, který je klíčový mimo jiné pro řešení olympiádních geometrických úloh, a ukazuje jeho užitečné vlastnosti. Nuže, pojďme se ponořit do hlubin krásné, syntetické geometrie!

Tvrzení. (Švrčkův bod) *V trojúhelníku ABC se osa vnitřního úhlu BAC, osa strany BC a kružnice opsaná protínají v jednom bodě. Tento bod nazýváme Švrčkův bod příslušející vrcholu A a značíme $\check{S}_A$.*

Tvrzení. *Střed kružnice vepsané $\triangle ABC$, střed kružnice připsané straně BC a body B a C leží na jedné kružnici se středem v $\check{S}_A$.*

Tvrzení. *Nechť se kružnice k, l vnitřně dotýkají v bodě T, tětiva AB kružnice k se dotýká l v bodě U. Pak UT je osa úhlu ATB.*

Tvrzení. (Shooting lemma) *Nechť M je střed oblouku PQ na kružnici ω a přímka p procházející bodem M protíná přímku PQ v X a ω v Y. Pak platí:*

(1) $|MX| \cdot |MY| = |MP|^2$.
(2) *Nechť I je vepsiště $\triangle PYQ$, pak $|MX| \cdot |MY| = |MI|^2$.*
(3) *Nechť p' je další přímka procházející M, která protíná přímku PQ v X' a ω v Y', pak X, Y, X' a Y' leží na jedné kružnici.*

Úmluva. V přednášce budeme používat následující značení (pokud nebude řečeno jinak): I je střed kružnice vepsané (vepsiště), O střed kružnice opsané (opsiště), J_A střed kružnice připsané k BC (připsiště) (obdobně J_B, J_C). Dále nechť AD je osa úhlu CAB, kde D leží na BC, obdobně BE a EF.

A jde se řešit

Příklad 1. Je dán trojúhelník ABC. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku BCI. Dokažte, že $|\sphericalangle OKB| = |\sphericalangle OLC|$, kde K, L jsou body dotyku kružnice vepsané ABC po řadě se stranami AB, AC. (China girls 2012/5)

Příklad 2. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω. Středy sousedních oblouků AB, BC, CD, DA označme postupně $\check{S}_A$, $\check{S}_B$, $\check{S}_C$, $\check{S}_D$. Dokažte, že přímky $\check{S}_A\check{S}_C$ a $\check{S}_B\check{S}_D$ jsou na sebe kolmé.

Příklad 3. V trojúhelníku ABC s běžným značením ukažte, že I je ortocentrem trojúhelníka $\check{S}_A\check{S}_B\check{S}_C$.

Příklad 4. Dokažte, že body J_A, J_B, A, B leží na jedné kružnici.

Příklad 5. Označme $\check{N}_A$ průsečík osy vnějšího úhlu u vrcholu A a osy protější strany. Ukažte, že tento „antišvrk“

(i) leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC,
(ii) leží ve středu J_BJ_C
(iii) a jeho vzdálenost od přímky BC je $\frac{r_B+r_C}{2}$, kde r_B a r_C značí poloměry kružnic připsaných naproti vrcholům B a C.

Příklad 6. Je dán trojúhelník ABC se středem kružnice vepsané I a vnitřním bodem P. Dále platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Ukažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastává, právě když $P = I$. (IMO 2006)

Příklad 7. Nechť jsou AL a BK osy úhlů nerovnoramenného trojúhelníku ABC (L leží na straně BC, K leží na straně AC). Osa úsečky BK protne přímku AL v bodě M. Bod N leží na přímce BK a platí, že LN je rovnoběžná s MK. Dokažte, že $|LN| = |NA|$. (Junior Balkan 2010)

Příklad 8. Kružnice ω_1 a ω_2 mají vnější dotyk v bodě T a obě se vnitřně dotýkají kružnice ω postupně v bodech R a S. Buď Q druhý průsečík RT a ω. Ukažte, že $|\sphericalangle QST| = 90°$. (KMS)

Příklad 9. Nechť BC je průměr kružnice k se středem O. Dále buď A bod na k takový, že $|\sphericalangle AOB| < 120°$, a D buď střed toho oblouku AB, který neobsahuje C. Rovnoběžka s DA vedená bodem O protne AC v bodě I. Osa úsečky OA protne k v bodech E a F. Ukažte, že I je středem kružnice vepsané trojúhelníku CEF. (IMO 2002)

Příklad 10. Mějme trojúhelník ABC. Označme I střed kružnice vepsané a průsečíky osy úhlu z vrcholu A se stranou BC a s kružnicí opsanou postupně D a M. Dokažte, že platí $|AM| \cdot |ID| = |MI| \cdot |AI|$.

Příklad 11. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s $|AB| \neq |AC|$. Kružnice nad průměrem BC protne strany AB a AC postupně v bodech M a N. Označme O střed strany BC a R průsečík os úhlů BAC a MON. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR se protínají na straně BC. (IMO 2004)

Příklad 12. Trojúhelník ABC splňuje vztah $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$. Kružnice jemu vepsaná se středem I se dotýká stran BC a CA postupně v bodech D a E. Nechť K, L jsou obrazy bodů D, E ve středové souměrnosti podle I. Ukažte, že body A, B, K a L leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 2005)

Příklad 13. Je dán trojúhelník ABC se středem I kružnice vepsané a kružnicí opsanou Γ. Přímka AI protne kružnici Γ podruhé v bodě D. Buď E bod na oblouku BDC a F bod na úsečce BC takový, že $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CAE| < \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$. Dále buď G střed úsečky IF. Dokažte, že přímky EI a DG se protínají na kružnici Γ.

(IMO 2010)

Příklad 14. Přímka ℓ protíná kružnici Γ v bodech A, B. Kružnice Γ_1 a Γ_2 jsou vepsané do stejné úseče určené přímkou ℓ a mají vnější dotyk. Dokažte, že jejich vnitřní společná tečna prochází pevným bodem, pohybují-li se Γ_1, Γ_2 ve vymezené úseči. (Prasolov)

Příklad 15. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a J střed kružnice připsané straně AD trojúhelníku ACD. Dokažte, že přímky IJ a AB jsou rovnoběžné.

Příklad 16. V trojúhelníku ABC platí $|AB| < |BC|$. Označme M střed AC. Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle I\check{N}_B B|$.

Příklad 17. Kružnice ω_1 a ω_2 se obě zevnitř dotýkají kružnice ω postupně v bodech A a B. Společná tečna ω_1 a ω_2 se jich dotýká postupně v bodech C a D. Ukažte, že $ABDC$ je tětivový čtyřúhelník

Příklad 18. Nechť kružnice Ω a ω mají vnitřní dotyk v bodě P, přičemž ω leží uvnitř Ω. Buď AB tětiva Ω, která se dotýká ω v bodě C. Průsečík PC s Ω různý od P si označme Q. Nechť tečny z bodu Q ke kružnici ω protínají kružnici Ω v bodech R a S. Vepsiště trojúhelníků APB, ARB a ASB si postupně označíme jako I, X a Y. Ukažte, že $|\sphericalangle PXI| + |\sphericalangle PYI| = 90°$. (Rumunsko TST 2013)

Příklad 19. Je dán trojúhelník ABC, jeho kružnice opsaná ω a bod D na straně BC. Buď ω_1 kružnice dotýkající se úsečky AD v bodě F, strany BC v bodě E a kružnice ω v bodě K. Dokažte, že střed I kružnice vepsané $\triangle ABC$ leží na přímce EF. (Sawayama-Thebault theorem, PraSe 29/myšmaš)

Návody

1. Všimni si, že na poloze bodů B, C příliš nezáleží, úloha je symetrická podle osy úhlu.

2. Úhel mezi $\check{S}_A\check{S}_C$ a $\check{S}_B\check{S}_D$ je součet velikostí oblouků nad $\check{S}_A\check{S}_B$ a nad $\check{S}_C\check{S}_D$. Jakou část kružnice tyto oblouky dohromady zabírají?

3. Úhel mezi $\check{S}_B\check{S}_C$ a $A\check{S}_A$ je součet velikostí oblouků nad $A\check{S}_C$ a nad $\check{S}_A\check{S}_B$. Jakou část kružnice tyto oblouky dohromady zabírají?

4. Využij vlastnosti os vnitřního a vnějšího úhlu.

5. (ii) Všimni si, že kružnice opsaná $\triangle ABC$ je kružnice devíti bodů $\triangle J_AJ_BJ_C$. Alternativně využij výsledek předchozího příkladu a dokaž, že $\check{N}_A$ je střed kružnice J_BJ_CBC.

6. Dokaž, že P leží na kružnici opsané trojúhelníku BIC, a využij trojúhelníkovou nerovnost.

7. Ukaž, že M je Švrčkův bod nějakého trojúhelníku. A pak to ukaž i pro N.

8. Dokresli si společnou tečnu ω_1 a ω_2. Pak dokaž, že Q je antišvrk.

9. Všimni si, že A je švrk trojúhelníku CEF. Potom dokaž, že I leží na kružnici se středem v A a poloměrem AE.

10. Trojúhelníky MCD a BAD jsou podobné, využij Shooting lemma.

11. Ukaž, že R je Švrčkův bod trojúhelníku AMN.

12. Tipni si, kde leží střed kružnice, a převeď úlohu na počítání vzdáleností.

13. Dokresli J_A, aby ses zbavil bodu G.

14. Využij Shooting lemma a mocnost bodu ke kružnici.

15. Dokresli si vepsiště trojúhelníku ABC, přidej Švrčkův bod $\triangle ADC$ a doúhli.

16. Dokresli si J_A, J_B a podívej se na podobnost trojúhelníků AIC a J_CIJ_A.

17. Využij tvrzení o dotýkajících se kružnicích a dokaž, že střed oblouku určeného společnou tečnou kružnic leží na BD i AC. Shooting lemma.

18. Uvědom si, že Q je švrk všech tří trojúhelníků a dokaž, že X, Y jsou body dotyku tečen z něj ke kružnici ω. Doúhli.

19. Protni osu úhlu u vrcholu A s EF (dokresli i Švrčkův bod) a využij Shooting lemma.

Literatura a zdroje

Příspěvek je převzatý z přednášky *Verči Hladíkové* a také inspirovaný seriálem na téma *Geometrie trojúhelníka.* Tímto jeho dvěma autorům a také Verče děkuji.

[1] Verča Hladíková: *Švrčkův bod*, Branná, 2019.
[2] David Hruška, Radovan Švarc: *Geometrie trojúhelníka*, seriál MKS, 2016/17.