

Štvorfarebný problém

PETER „πTR“ KORCSOK

ABSTRAKT. Jedna z najslávnejších a najdlhšie otvorených hypotéz v teórii grafov je (teraz už) Veta o štyroch farbách. Na tejto prednáške si spomenieme niektoré z pokusov na jej dokázanie a pokúsime sa v nich nájsť chyby. Tiež si ukážeme niekoľko tipov, kam by sme sa mali vydať, ak vetu chceme skutočne dokázať. A v závere si ukážeme niečo málo z vyberavosti grafu, teda v určitom zmysle zobecnenia klasického ofarbovania.

Citát. „Domnienka o štyroch farbách bola jedným z najväčších nevyriešených problémov matematiky. Od roku 1852 až do dnešného dňa sa ju prakticky každý matematik, ktorý kedy žil, niekedy snažil vyriešiť.“ *Thomas Saaty a Paul Kainen, 1977*

Veta. (o štyroch farbách) *Každú mapu vieme ofarbiť pomocou štyroch farieb tak, aby žiadne dva susediace štáty nemali rovnakú farbu.*

História tejto vety siaha zhruba do roku 1852, keď si Francis Guthrie všimol, že na ofarbenie mapy anglických štátov mu stačia štyri farby. Obrátil sa preto na svojho brata Frederica so zvedavou otázkou, či to rovnako pôjde s ľubovoľnou mapou. Nakoľko obaja v tom čase študovali pod vedením Augusta de Morgana, Frederic túto otázku posunul priamo de Morganovi a celej matematickej spoločnosti.

Na svoj prvý „dôkaz“ ale čakala vyše 25 rokov, zato dostala rovno dva: v roku 1879 od sira Alfreda Braya Kempeho a v roku 1880 od Petra Guthrie Taita. Tešíť sa ale mohla „len“ 11 rokov: v roku 1890 Percy Heawood vyvrátil Kempeho dôkaz a v roku 1891 Julius Petersen našiel protipríklad k Taitovmu dôkazu. Oba neúspešné dôkazy ale priniesli aspoň čiastočné vyriešenie problému.

V priebehu nasledujúcich desaťročí sa o zdoľanie Problému štyroch farieb snažili mnohí matematici, za zmienku stojí napríklad Hugo Hadwiger a jeho domnienka z roku 1943, ktorá zovšeobecňuje tento problém a stále nie je vyriešená.

Prvý dôkaz, ktorý doteraz nebol vyvrátený,¹ spáchali páni Kenneth Appel a Wolfgang Haken, s miernou pomocou Johna Kocha, v roku 1976, pričom jeho pomerne veľká časť je vyriešená na počítači. Na začiatku 80-tych rokov síce bolo hlásených niekoľko chýb v ich dôkaze, všetkým sa ale autori úspešne ubránili a v roku 1989 vydali knihu so všetkými detailami.

20 rokov po prvom dôkaze, v roku 1996, ponúkli Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour a Robin Thomas svetu nový dôkaz Vety o štyroch farbách, ktorý je

¹Čiastočne aj preto, že je tak komplikovaný, že ho nikto nevydrží čítať dostatočne dlho ;).

výrazne jednoduchší a kratší,² aj keď stále využíva počítače. Tento dôkaz bol v roku 2005 overený (opäť na počítači) pomocou dokazovacieho jazyka Coq.

Na prednáške si ukážeme niektoré z neúspešných dôkazov a skúsime v nich nájsť chybu, alebo naopak, ukážeme si niečo, čo by sa dalo k úspešnému dôkazu použiť.

Poznámka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že sa v žiadnom mieste nestretávajú územia 4 štátov.

Tvrdenie. *V každej mape nájdeme štát, ktorý má maximálne 5 susedov.*

Definícia. Na mape ofarbenej štyrmi farbami nazveme *AB-obtiahnutím* zjednotenie všetkých hraníc, ktoré majú na jednej strane niektorú z farieb *A* alebo *B* a na druhej jednu z farieb *C* a *D*.

Každé takéto obtiahnutie obsahuje všetky vrcholy a tvorí niekoľko disjunktných kružníc párnej dĺžky.

Tvrdenie. *Ak v mape existuje množina disjunktných kružníc párnej dĺžky, ktoré spolu prechádzajú všetkými vrcholmi, potom vieme mapu ofarbiť pomocou štyroch farieb.*

Cvičenie. Dá sa v každej mape nájsť jedna kružnica, ktorá prechádza všetkými vrcholmi?

Ak nám ešte zostane čas, pozrieme sa na mierne iné farbenie: každému vrcholu pridelieme zoznam „povolených“ farieb (každý vrchol môže mať povolené odlišné farby) a následne chceme vrcholy ofarbiť tak, aby žiadne dva susedné nemali rovnakú farbu a každý vrchol použil farbu zo svojho povoleného zoznamu.

Definícia. *Vyberavosťou* grafu nazveme najmenšie číslo *k*, že keď každému vrcholu povolíme ľubovoľnú *k*-ticu farieb, vždy nájdeme aj správne ofarbenie.

Cvičenie. Nájdite graf, ktorý má inú vyberavosť ako (bežnú) farebnosť.

Tvrdenie. *Každý rovinný graf má vyberavosť maximálne 5.*

Literatúra a zdroje

Pri písaní tohto príspevku som sa dosť inšpiroval príspevkom Filipa Hláska *Problém čtyř barev* zo sústredenia Hojsova Stráž 2011, za čo mu na tomto mieste ďakujem.

- [1] Donald Hatch, Melinda Green: „Proof“ of the 4-Color Map Theorem, <http://www.superliminal.com/4color/4color.htm>
- [2] Robin Thomas a kol.: *The Four Color Theorem*, <http://people.math.gatech.edu/thomas/FC/fourcolor.html>

²Miesto 139 strán krátkej (r. 1976) alebo vyše 700 strán dlhej verzie (r. 1989) ich zaberá len 9.