Stejnolehlost a kružnice

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek opakuje základní vlastnosti stejnolehlosti. Dále vysvětluje princip skládání stejnolehlostí a na závěr dává vše do souvislosti s mocností bodu ke kružnici a kruhovou inverzí.

Úvod

Co mají společného stejnolehlost a mocnost bodu ke kružnici se základními vlastnostmi kruhové inverze? V jednoduchosti by se dalo říci, že jakousi *násobivost*. Pomocí těchto tří fint si totiž umíme v geometrických úlohách vyrábět součiny a podíly různých délek, které pak mezi sebou můžeme porovnávat. Začneme stejnolehlostí, jejíž role je klíčová, a postupně se přes úlohy, ve kterých bude potřeba stejnolehlostí hned několik, dopracujeme až k těm, kde už sama nestačí. Abychom si ujasnili pojmy, zmíníme na začátek několik definic a vět.

Trocha definic

Definice. (Stejnolehlost) *Je dán bod S a reálné číslo k, $k \neq 0$.* Stejnolehlost se středem S a koeficientem k *je zobrazení $H(S,k)$, které přiřazuje:*

(i) *každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ (přitom pro $k > 0$ leží bod X' na polopřímce SX a pro $k < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné),*

(ii) *bodu S bod $S' = S$.*

Je-li X vzor a X' obraz ve stejnolehlosti $H(S,k)$, píšeme

$$H(S,k)\colon X \to X'.$$

Věta. *Složením dvou stejnolehlostí $H_1(S_1,k_1)$, $H_2(S_2,k_2)$ $(k_1 \cdot k_2 \neq 1)$ vzniká stejnolehlost $H_3(S_3,k_3)$, kde $H_3 \in H_1H_2$ a $k_3 = k_1 \cdot k_2$. Pokud $k_1 \cdot k_2 = 1$, vzniká posunutí.*

Věta. (Desargues) *Nechť ABC a KLM jsou dva trojúhelníky. Přímky AK, BL, CM procházejí jedním bodem nebo jsou všechny rovnoběžné, právě když body $X = AB \cap KL$, $Y = BC \cap LM$, $Z = AC \cap KM$ leží v přímce.*

Definice. (Mocnost) Mocnost bodu M *ke kružnici $k(S,r)$ (značeno $m(M,k)$) je číslo $|MS|^2 - r^2$.*

Klíčová slova. stejnolehlost, mocnost, kružnice, geometrie, planimetrie

Věta. *Je-li p přímka procházející bodem M a protínající kružnici k v bodech A,B, pak $|MA| \cdot |MB| = |m(M,k)|$ nezávisle na volbě přímky p.*

Definice. (Kruhová inverze) *Nechť je dána kružnice $k(I,r)$. Kruhová inverze přiřadí bodu X bod X' ležící na polopřímce IX tak, aby platilo*

$$|IX| \cdot |IX'| = r^2.$$

Speciálně $I \to \infty$ a $\infty \to I$. Bod I nazýváme střed inverze.

Věta. *Obrazem přímky v kruhové inverzi je přímka, nebo kružnice. Obrazem kružnice je kružnice, nebo přímka.*

Úloha mimo mísu

Příklad 1. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C je D pata výšky na přeponu. Nechť r, r_1, r_2 jsou postupně poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, ACD, BCD. Dokažte, že $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

Obyčejná stejnolehlost

Notná řádka úloh se dá vyřešit jen pouhou obratnou manipulací se stejnolehlostí. Na takové se podíváme nejdřív. Jak poznat, že může pomoci právě stejnolehlost? Dobrým vodítkem bývají dotýkající se kružnice. Pokud se totiž dvě kružnice k, l dotýkají v bodě T, je tento středem jejich vnější stejnolehlosti. Dále může stejnolehlost pomoci při dokazování, že několik přímek prochází jedním bodem (konkrétně středem stejnolehlosti). Hlavu také nevěšíme, pokud se v zadání vyskytuje hojnost středů úseček – tam mnohdy situaci vyjasní stejnolehlost s koeficientem 2.

Příklad 2. Kružnice k, l mají vnitřní dotyk v bodě T. Na l zvolíme body A, B tak, že AB se dotýká k v bodě S. Dokažte, že TS je osou úhlu ATB.

Příklad 3. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T. Navíc se obě vnitřně dotýkají kružnice m postupně v bodech R, S. Druhý průsečík přímky RT s kružnicí m označme Q. Dokažte, že $|\sphericalangle TSQ| = 90°$.

Příklad 4. V trojúhelníku ABC protínají osy vnitřních úhlů kružnici opsanou postupně v bodech S_A, S_B, S_C. Kružnice vepsaná se dotýká stran a, b, c postupně v bodech K, L, M. Dokažte, že přímky S_AK, S_BL, S_CM procházejí jedním bodem.

Příklad 5. Nechť ABC je trojúhelník a nechť D je průsečík tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v bodě A a přímky BC. Nechť E je průsečík kolmice na

BC v B a osy strany BA. Analogicky nechť F je průsečík kolmice na BC v bodě C a osy strany CA. Dokažte, že D, E, F leží v přímce.

Když jedna nestačí

Občas jedna stejnolehlost nestačí a my si musíme vypomoci skládáním. Využíváme toho, že složením dvou stejnolehlostí většinou vzniká opět stejnolehlost, a to se středem na přímce určené „dílčími" středy.

Příklad 6. V rovině jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l, přičemž k leží uvnitř l. Buď m kružnice, která má s k vnější dotyk v bodě K a s l vnitřní dotyk v bodě L. Dokažte, že KL prochází pevným bodem X nezávislým na volbě m.

Příklad 7. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník a P bod na straně AB takový, že kružnice vepsaná trojúhelníku CPD mající střed v I se dotýká kružnic vepsaných trojúhelníkům APD, PBC postupně v bodech K, L. Označme $E = AC \cap BD$ a $F = AK \cap BL$. Dokažte, že body E, I, F leží v přímce.

Příklad 8. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, ve kterém $|BA| \neq |BC|$. Označme postupně ω_1 a ω_2 kružnice vepsané trojúhelníkům ABC, ADC. Předpokládejme, že existuje kružnice ω, která se dotýká polopřímky BA za bodem A, polopřímky BC za bodem C a přímek AD, CD. Dokažte, že společné vnější tečny kružnic ω_1 a ω_2 se protnou na kružnici ω.

Příklad 9. Kružnice k, l, m mají po dvou vnější dotyk ($l \cap m = A$, $k \cap m = B$, $k \cap l = C$). Kružnice n má se všemi navíc vnitřní dotyk postupně v bodech K, L, M. Dokažte, že přímky AK, BL, CM procházejí jedním bodem.

Konečně násobíme

A už je to tady! Úspěšně jsme se prokousali přes stejnolehlost a skládání a je na čase začít násobit délky. Začleníme tedy do našeho arzenálu mocnost bodu ke kružnici, už na začátku zmíněnou kruhovou inverzi nebo například Euklidovy věty o výšce a odvěsně a jdeme na to.

Příklad 10. Dokažte, že onen pevný bod X z příkladu 6 má ke všem kružnicím m stejnou mocnost.

Příklad 11. Je dána půlkružnice t nad průměrem AB a na ní bod C. Bodem C vedeme kolmici p k AB. Zkonstruujme nyní kružnici k tak, aby se dotýkala t v bodě T, AB v bodě D a p v bodě P. Dokažte, že CD půlí úhel ACP.

Příklad 12. Mějme čtyřúhelník $EFGH$ takový, že se dají sestrojit kružnice e, f, g, h se středy po řadě v bodech E, F, G, H tak, aby se kružnice e, g obě dotýkaly (vnějším dotykem) kružnic f, h. Ukažte, že pak body dotyku těchto kružnic tvoří tětivový čtyřúhelník.

Příklad 13. Dána je kružnice k a přímka p, která ji protíná v bodech A,B. Označme C střed jednoho z oblouků AB. Bodem C vedeme přímky r, s. Jejich průsečíky s přímkou p a druhé průsečíky s kružnicí k označíme R_p, R_k, S_p, S_k. Dokažte, že tyto čtyři body leží na kružnici.

Příklad 14. Do kruhové úseče jsou vepsány dvě navzájem se dotýkající kružnice k, l. Dokažte, že jejich společná vnitřní tečna prochází pevným bodem.

Příklad 15. V rovině je dána přímka d a na ní body A, B. Kružnice k, l, m, n se středy K, L, M, N se všechny dotýkají d. Přitom k a l mají vnější dotyk v A, m a n mají vnější dotyk v B a K a M leží v téže polorovině určené přímkou d. Navíc existuje kružnice ω, která má se všemi čtyřmi vnitřní dotyk. Dokažte, že KM a LN se protínají na d.

Literatura

Závěrem bych chtěl poděkovat *Martinu Tancerovi*, *Michalu Rolínkovi* a *Alče Skálové*, z jejichž příspěvků jsem čerpal. Většina úloh je převzatá z různých úrovní matematické olympiády, starších ročníků PraSátka či slovenského semináře KMS.