Spirální podobnost

Franta Konopecký

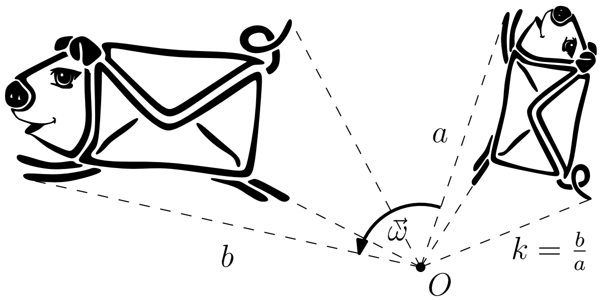
Abstrakt. Obsáhlý a souhrnný elaborát o *spirální podobnosti* (tj. složení stejnolehlosti a otočení), určený jednak jako ucelený studijní materiál využitelný i pro samostudium, druhak jako obsáhlý zdroj příkladů s návody a řešeními. Počet příkladů: 15, počet cvičení: 5, počet tvrzení o spirální podobnosti: 10.

Úvod

Spirální podobnost je nejobecnější přímé podobné zobrazení roviny, které řeší některé jinak velmi složité úlohy. Cílem tohoto příspěvku je sestavit ucelený souhrn poznatků o spirální podobnosti, ukázat použití na příkladech a umožnit plnohodnotné nastudování problematiky.

Definice. *Spirální podobnost* je složení otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určena středem spirální podobnosti O, orientovaným úhlem otočení $\overrightarrow{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.

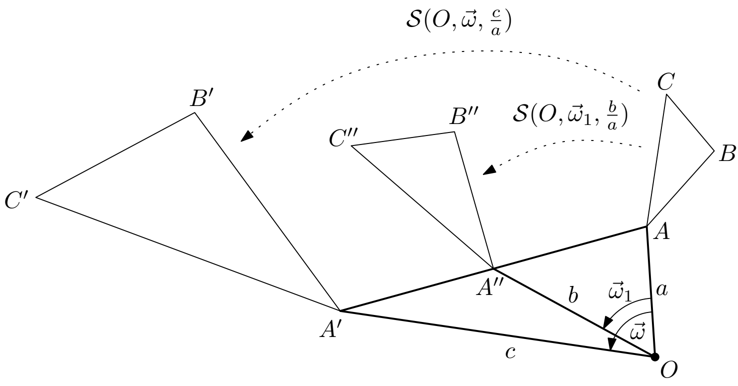
Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \vec{\omega}, k)$



Motivační příklady

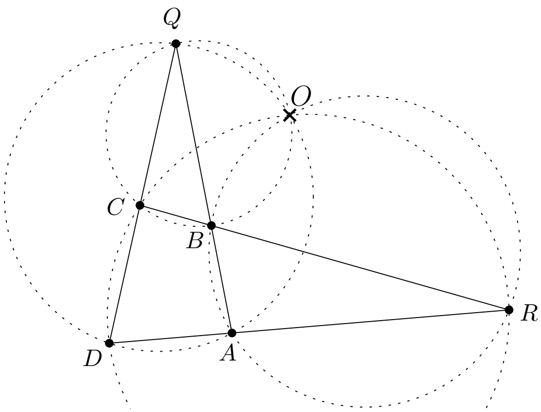
Příklad 1. V rovině jsou dány různě velké stejně orientované podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Středy úseček AA', BB', CC' označme po řadě A'', B'', C''. Ukažte, že i trojúhelník $A''B''C''$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Klíčová slova. spirální podobnost, geometrie, zobrazení, podobnost, hardcore, studijní text, stejnolehlost, otočení



Řešení. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jednoznačně určují spirální podobnost $\mathcal{S}$ $(O, \overrightarrow{\omega}, \frac{c}{a})$, která převádí jeden na druhý (to bude jedno z následujících tvrzení). Trojúhelníky OAA', OBB', OCC' mají stejný úhel u vrcholu O a stejný poměr přilehlých stran. Jsou tedy podobné, a to i s těžnicemi, podobné jsou tak i trojúhelníky OAA'', OBB'', OCC''. Nová spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}_1, \frac{b}{a})$ zobrazuje trojúhelník ABC na $A''B''C''$. Spirální podobnost je podobné zobrazení, trojúhelníky jsou podobné.

Příklad 2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q a průsečík přímek AD a BC označme R. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BCQ, ADQ, ABR, CDR procházejí jedním bodem.



Řešení. Protože se všechny čtyři kružnice protínají ve středu spirální podobnosti O, která zobrazuje $A \to B$, $D \to C$, je důkaz dokončen.

S nynějšími znalostmi je předchozí důkaz neplatný, ale za několik málo okamžiků bude vše opravdu takto jednoduché!

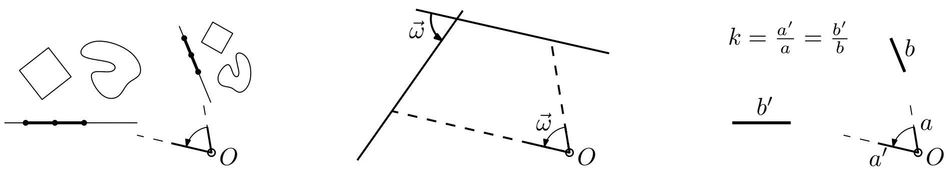
Vlastnosti spirální podobnosti

Tvrzení 1. (Základní vlastnosti) *Pro spirální podobnost platí:*

(i) *Je to podobné zobrazení, obrazem přímky je přímka, obrazem čtverce je čtverec, obrazem středu úsečky je střed obrazu úsečky, obecně obrazem útvaru je jemu podobný útvar.*

(ii) *Úhel mezi přímkou a jejím obrazem je úhel otočení.*

(iii) *Poměr délky úsečky a jejího obrazu je roven koeficientu stejnolehlosti.*



Tvrzení 2. (Speciální případy) *Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\overrightarrow{\omega}$, k redukuje následovně.*

(i) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 0$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem k.*

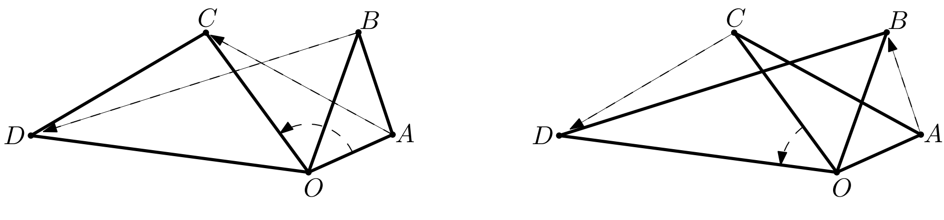
(ii) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem $-k$.*

(iii) *Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem O o úhel $\overrightarrow{\omega}$.*

(iv) *Pro $k = 1$ a $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme středovou souměrnost se středem O.*

(v) *Žádná kombinace O, $\overrightarrow{\omega}$, k nám nedá posunutí nebo* nepřímé *zobrazení.*

Tvrzení 3. (Spirální podobnosti chodí po dvou!) *Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \to C$ a $B \to D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \to B$ a $C \to D$, má též střed v O. Úhel otočení a koeficient se může lišit.*



Tvrzení 4. (Existence a jednoznačnost) *V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \to C$, $B \to D$. (V případě rovnoběžníku $ABDC$ bychom potřebovali posunutí, které spirální podobnost neposkytuje.)*

Návod. Jednoznačnost: řekněme, že existují dvě takové spirální podobnosti $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ s různými středy O_1 a O_2. Zůstane v identitě $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2^{-1}$ bod O_1 na místě? Existence: je obsažena v *tvrzení 6.*

Lemma 5. (S.p. jednoznačně určena trojúhelníkem OAA'.) *Buď $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ spirální podobnost zobrazující bod A na A'. Potom platí následující.*

(i) *Pro různé body A jsou všechny trojúhelníky OAA' podobné.*
(ii) *Libovolný trojúhelník OAA' zpětně jednoznačně určuje spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.*

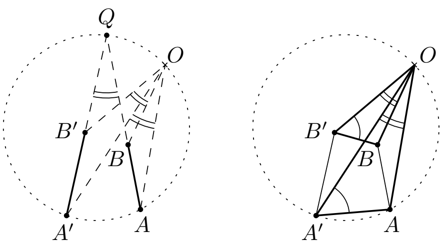
Značení. Orientovaný úhel ABC, tedy úhel od polopřímky $\mapsto BA$ k polopřímce $\mapsto BC$, budeme značit $\sphericalangle\overrightarrow{ABC}$.

Tvrzení 6. (Konstrukce středu; existence) *Buď $ABBA'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q. Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti $\mathcal{S}\Big(O, \sphericalangle\overrightarrow{AOA'}, \frac{|AB|}{|A'B'|}\Big)$, která zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$.*

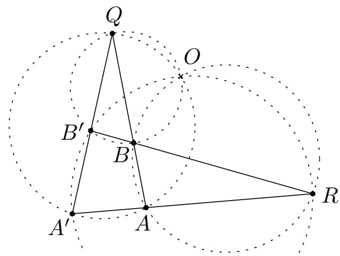
Důkaz. Pokud O splývá s Q, redukuje se spirální podobnost na otočení. Předpokládejme $O \neq Q$. Podle předchozího *lemmatu 5* nám stačí k existenci spirální podobnosti se středem v O ukázat podobnost trojúhelníků OAA' a OBB'. Tu prubne shodnost úhlů. Díky rovnostem obvodových úhlů je

$$|\sphericalangle AOA'| = |\sphericalangle AQA'| = |\sphericalangle BQB'| = |\sphericalangle BOB'|,$$
$$|\sphericalangle BB'O| = |\sphericalangle BQO| = |\sphericalangle AQO| = |\sphericalangle AA'O|$$

a trojúhelníky OAA' a OBB' jsou podobné.



K předcházejícímu tvrzení



K následujícímu tvrzení

Tvrzení 7. (Průsečík čtyř kružnic, Miquel's point of quadrilateral) *Buď $ABB'A'$ čtyřúhelník s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a $A'B'$ označme Q, průsečík přímek AA' a BB' označme R. Potom střed spirální podobnosti O, která zobrazuje $A \to A'$ a $B \to B'$, je průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'Q$, $BB'Q$, ABR a $A'B'R$.*

Důkaz. Podle *tvrzení 3* je O středem dvou spirálních podobností. Díky první z nich leží podle *tvrzení 6* na kružnicích opsaných ABQ a $A'B'Q$ a díky druhé na kružnicích opsaných $AA'R$ a $BB'R$.

Poznámka. Předchozí tvrzení nám zároveň (už regulérně) dokázalo druhý motivační příklad.

Cvičení na spirální podobnost

Následují **důležitá** cvičení na pochopení principů spirální podobnosti. Jejich vyřešení (většinou pomocí některých tvrzení) je esenciální k pochopení těžších příkladů. Používejte v nich hlavně analogie k motivačnímu *příkladu 1*. Dále si zkuste pomocí *tvrzení 4* o existenci a jednoznačnosti zdůvodnit, že spirální podobnost můžete použít, a navíc jednoznačně. Poté ze základních vlastností o podobnosti a *lemmatu 5* hledejte další spirální podobnosti, případně využijte existence „duální" spirální podobnosti podle *tvrzení 3*.

Cvičení 1. Na stěně visí dvoje hodiny, jedny jdou o čtvrthodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 2. Kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Bodem A se otáčí přímka, která protíná kružnici k podruhé v bodě K a l podruhé v L. Jakou množinu vykresluje střed úsečky KL?

Cvičení 3. Zadání stejné jako v předchozím příkladě, akorát se ptáme, jakou množinu vykresluje bod N úsečky KL, pro který $|KN| = 2|LN|$.

Cvičení 4. Zadání stejné jako v předchozím příkladě plus je úsečka KL doplněna na rovnostranný trojúhelník KLM. Co maluje bod M?

Návod. Dokažte, že má čtyřúhelník $BLMK$ pořád stejný tvar (z obvodových úhlů a stejného tvaru rovnostranného trojúhelníku). Všechny trojúhelníky BLM jsou si tím pádem podobné a spirální podobnost se středem v B, úhlem $\sphericalangle \overrightarrow{LBM}$ a koeficientem $|BL|/|BM|$ zobrazuje každý bod L do nějakého bodu M.

Cvičení 5. Po třech různoběžných přímkách se rovnoměrně pohybují body A, B, C. Ukažte, že pokud jsou ve dvou časech t_1, t_2 trojúhelníky ABC podobné, tak už jsou podobné v každém okamžiku.

Shrnutí spirální podobnosti

A na závěr výkladu uvádíme důležité fakty o spirální podobnosti, které by si měl důrazně osvojit každý, kdo ji chce umět používat.

(i) S.p. je podobné zobrazení, všechny poměry a tvary se zachovávají.
(ii) Úhel otočení je i úhlem odpovídajících si přímek v zobrazení.
(iii) Středem s.p. prochází čtyři kružnice umožnující několikanásobnou rovnost obvodových úhlů.
(iv) Každá s.p. má vždy duální s.p., která má stejný střed a poskytuje další rovnosti úhlů.
(v) Pokud trojúhelník tvořený třemi rovnoměrně se pohybujícími body má dvakrát stejný tvar, má pořád stejný tvar.

Bohužel nejsou tvrzení o spirální podobnosti obecně známá, takže je dobré míti na paměti i náznaky jejich důkazů, abyste mohli použité fakty zdůvodnit. Viz *cvičení 5.*

Příklady na spirální podobnost

Příklad 3. (Simpsonova přímka) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že paty kolmic z D postupně na přímky AB, AC, BC leží na jedné přímce. Paty označme postupně P, Q, R.

Návod. Doplňte do obrázku bod S tak, aby byly trojúhelníky DQS, DRA a DPC podobné. Spirální podobnost $\mathcal{S}(D, \sphericalangle\overrightarrow{PDC}, \frac{|PD|}{|DC|})$ zobrazuje trojici bodů P-Q-R na C-S-A, které leží na přímce.

Příklad 4. (USAMO 2006) Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a nechť E, F jsou body postupně na stranách AD, BC takové, že dělí strany ve stejném poměru $|AE| : |ED| = |BF| : |FC|$. Přímka EF protíná přímky BA a CD postupně v bodech S a T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE mají společný bod.

Návod. Najděte spirální podobnost zobrazující $A \to B$ a $D \to C$ a využijte *tvrzení 6* o konstrukci středu.

Příklad 5. (PraSe 27-3-8) ABC je ostroúhlý trojúhelník s výškou AD. Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že X, D, Y leží na jedné přímce a $X \neq D \neq Y \neq B$. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY. Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé.

Návod. Najděte spirální podobnost svazující tři Thaletovy kružnice.

Řešení. Dvě různá řešení najdete na *http://mks.mff.cuni.cz/archive/27/3.pdf.*

Příklad 6. (Od Kennyho) Stranám AB a BC trojúhelníka ABC připíšeme zvenčí podobné pravoúhelníky[2] $BKLC$ a $MNBA$. Ukažte, že přímky NC, ML a AK procházejí jedním bodem.

Návod. Vezměte vhodnou spirální podobnost a zobrazte na sebe kružnice opsané našim pravoúhelníkům.

Příklad 7. (Zobecnění IMO 2005) Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který není lichoběžník. Na stranách AB a CD jsou body E a F, které dělí své strany ve stejném poměru $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Průsečíky úhlopříček a přímky EF označme P, Q, R. Potom pro různé polohy bodu E prochází kružnice opsané trojúhelníku PQR ještě jedním pevným bodem (různým od průsečíku úhlopříček P).

Návod.

(i) Vykreslete všechny kružnice vztahující se ke spirální podobnosti převádějící $A \to C$, $B \to D$.
(ii) Pomocí obvodových úhlů ukažte, že střed oné spirální podobnosti leží na kružnici opsané trojúhelníku PQR.

Příklad 8. (Od Kennyho) Je dán pětiúhelník $ABCDE$ takový, že jsou si trojúhelníky ABC, ACD, ADE podobné. Označme T průsečík BD a CE. Ukažte, že přímka AT je kolmá na spojnici středů S_1 a S_2 kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE.

Návod.

(i) Stačí vám ukázat, že $|AS_1| = |S_1T|$ a $|AS_2| = |S_2T|$.
(ii) Pomocí spirální podobnosti dokažte rovnost úhlů $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BTC|$ a $ABCT$ je tětivový.

Příklad 9. (IMO Shortlist 2006) Buď $ABCDE$ konvexní pětiúhelník takový, že jsou si trojúhelníky ABC, ACD, ADE podobné. Úhlopříčky BD a CE se protínají v P. Ukažte, že přímka AP půlí stranu CD.

Návod. Označme Q průsečík BD a AC, R průsečík DA a EC. Díky *Cèvově Větě*[3] nám stačí ukázat $|AQ| : |QC| = |AR| : |RD|$. Čtyřúhelníky $ABCD$ a $ACDE$ si odpovídají ve spirální podobnosti, tedy i jejich průsečíky úhlopříček, a jsou tak zachovány potřebné poměry.

[2] Pravoúhelník je obdélník nebo čtverec.

[3] **Cèvova věta:** Na stranách a, b, c trojúhelníka ABC jsou postupně body A_1, B_1, C_1. Přímky AA_1, BB_1, CC_1 se protínají v jednom bodě, právě když platí rovnost $\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1$.

Příklad 10. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u C. Označme M střed přepony a D takový bod odvěsny BC, že platí $|CD| = |CM|$. Nechť dále P značí průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům CMB a BDA, $P \neq B$. Ukažte, že přímka BP je osou úhlu ABC.

Návod.

(i) Najděte spirální podobnost zobrazující $\triangle CPM$ na $\triangle DPA$.
(ii) Pomocí „duální“ spirálky a rovnosti $|CD| = |MA|$ ukažte shodnost $\triangle CPD$ a $\triangle MPA$.
(iii) Uvědomte si, v jakém vztahu jsou výšky ve shodných trojúhelnících.

Příklad 11. (Čína 1992) Střed kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$ označme O. Úhlopříčky AC a BD se protínají v P. Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se protínají v P a Q. Předpokládejme, že jsou body O, P a Q různé. Dokažte, že $|\sphericalangle OQP| = 90°$.

Návod.

(i) Bod O si definujte jako průsečík os úseček AC a BD.
(ii) Spirální podobnost se středem v O zobrazuje $AC \to BD$.
(iii) Jestliže označíme S_1, S_2 středy úhlopříček, tak O, P, S_1, S_2 leží na Thaletově kružnici.
(iv) Díky spirální podobnosti leží Q, P, S_1, S_2 též na jedné kružnici.

Příklad 12. (Mathlinks) Ke stranám konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ připíšeme zvnějšku podobné trojúhelníky ABW, BCX, CDY, DAZ. Ukažte, že $WXYZ$ je rovnoběžník.

Návod.

(i) Čtyřúhelník je rovnoběžníkem, jestliže středy úhlopříček splývají.
(ii) Středy úseček AC, BD, WY, XZ označme R, S, T, U. Pomocí spirální podobnosti převádějící ABW na CDY ukažte podobnost $\triangle RST \sim \triangle ABW$ podobně jako v *příkladu 1*.
(iii) Druhou spirální podobností ukažte $\triangle RSU \sim \triangle BCX$.
(iv) Z podobností trojúhelníků plyne $T = U$.

Příklad 13. (PraSe 26-6-8) $PIVO$ je konvexní čtyřúhelník. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y. X je bod uvnitř $PIVO$ takový, že $|\sphericalangle XVO| = |\sphericalangle XPO| < < 90°$ a $|\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90°$. Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2|\sphericalangle XIV|$.

Návod.

(i) Vezměme body X' a Y' tak, že platí podobnosti trojúhelníků $\triangle OPX \sim OY'X'$ a $\triangle VX'Y' \sim \triangle VXI$.
(ii) Pomocí spirálních podobností se středy v O, V zobrazujícími $P \to Y' \to I$ ukažte $|PY'| = |Y'I|$, z čehož vyplyne $Y = Y'$.

Řešení. Úplné řešení najdete na *http://mks.mff.cuni.cz/archive/26/6.pdf.*

Příklad 14. (IMO Shortlist 1992) V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky stejně dlouhé. Ukažte, že pokud vně každé straně připíšeme rovnostranný trojúhelník, tak jsou spojnice protějších středů těchto trojúhelníků na sebe kolmé.

Návod.

(i) Zafixujte AC a rovnoběžně posouvejte BD, dedukujte pohyb oněch spojnic středů.
(ii) Zjistěte, jestli kolmost platí v limitní poloze $B = C$.
(iii) Pomocí spirálních podobností ukažte, že se při pohybu bodů B, D z limitní polohy do obecné polohy pohybují protější středy trojúhelníků stejně.

Příklad 15. (IMO Shortlist 2006) Na stranách a, b, c trojúhelníka ABC zvolíme postupně body A_1, B_1, C_1. Kružnice opsané trojúhelníkům AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 protnou kružnici opsanou podruhé v bodech A_2, B_2, C_2. Body A_3, B_3, C_3 jsou středovými obrazy bodů A_1, B_1, C_1 postupně podle středů stran a, b, c. Ukažte, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ je podobný trojúhelníku $A_3B_3C_3$.

Návod.

(i) Pomocí znalosti průniku kružnic jako středu s.p. ukažte, že $\triangle A_2BC \sim \sim \triangle A_2C_1B_1$.
(ii) Označme středy úseček b, c, AA_2 postupně S_b, S_c, S_{AA_2}. Ukažte $\triangle S_{AA_2} S_cS_b \sim \triangle A_2BC$.
(iii) S odkazem na *cvičení 5* odůvodněte $\triangle A_2C_1B_1 \sim \triangle S_{AA_2}S_cS_b \sim \triangle AC_3B_3$.
(iv) Ukažte shodnost odpovídajících úhlů v $\triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_3B_3C_3$.

Literatura, zdroje a poděkování

Především děkuji *Kennymu Rolínkovi*, že mě k tomuto tématu dotlačil a dodal kopu pěkných příkladů. Mými dalšími zdroji byly:

[1] Archiv prasátka, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/.*
[2] Franta Konopecký, *Hýbání s body*, *http://frakon.matfyz.cz/files/HybaniSBody.pdf.*
[3] Matematické fórum *http://www.mathlinks.ro.*
[4] Yufei Zhao, *Similarity (IMO Training 2007)*, 2007, *http://web.mit.edu/yufeiz/www/similarity.pdf.*

Tento elaborát i materiál o hýbání s body bude zanedlouho ke stažení v knihovně semináře *http://mks.mff.cuni.cz/library/.*