Spirální podobnost

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

Úvod

Spirální podobnost je nejobecnější přímé podobné zobrazení roviny, které řeší některé jinak velmi složité úlohy. Cílem tohoto příspěvku je shrnutí poznatků o spirální podobnosti a ukázat použití na lehkých až středních příkladech.

Definice. *Spirální podobnost* je složení otočení a stejnolehlosti podle téhož středu. Je určena středem spirální podobnosti O, orientovaným úhlem otočení $\overrightarrow{\omega}$ a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Značíme ji $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.

Motivační příklady

Příklad 1. V rovině jsou dány různě velké stejně orientované podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Středy úseček AA', BB', CC' označme po řadě A'', B'', C''. Ukažte, že i trojúhelník $A''B''C''$ je podobný předchozím trojúhelníkům.

Příklad 2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q a průsečík přímek AD a BC označme R. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BCQ, ADQ, ABR, CDR procházejí jedním bodem.

Vlastnosti spirální podobnosti

Tvrzení 1. (Základní vlastnosti) *Pro spirální podobnost platí:*

(i) *Je to podobné zobrazení, obrazem přímky je přímka, obrazem čtverce je čtverec, obrazem středu úsečky je střed obrazu úsečky, obecně obrazem útvaru je jemu podobný útvar.*
(ii) *Úhel mezi přímkou a jejím obrazem je úhel otočení.*
(iii) *Poměr délky úsečky a jejího obrazu je roven koeficientu stejnolehlosti.*

Tvrzení 2. (Speciální případy) *Spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ se při speciálních hodnotách $\overrightarrow{\omega}$, k redukuje následovně.*

(i) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 0$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem k.*
(ii) *Pro $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme stejnolehlost se středem O a koeficientem $-k$.*
(iii) *Pro $k = 1$ dostáváme otočení kolem O o úhel $\overrightarrow{\omega}$.*
(iv) *Pro $k = 1$ a $\overrightarrow{\omega} = 180°$ dostáváme středovou souměrnost se středem O.*
(v) *Žádná kombinace O, $\overrightarrow{\omega}$, k nám nedá posunutí nebo* nepřímé *zobrazení.*

Tvrzení 3. (Spirální podobnosti chodí po dvou) *Nechť spirální podobnost se středem O převádí $A \to C$ a $B \to D$. Pak jednoznačně určená spirální podobnost, která převádí $A \to B$ a $C \to D$, má též střed v O. Úhel otočení a koeficient se může lišit.*

Tvrzení 4. (Existence a jednoznačnost) *V rovině jsou dány body A, B, C, D takové, že $ABDC$ (v tomto pořadí!) není rovnoběžník. Pak existuje právě jedna spirální podobnost, která převádí $A \to C$, $B \to D$.*

Lemma 5. (S. p. jednoznačně určena trojúhelníkem OAA') *Buď $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$ spirální podobnost zobrazující bod A na A'. Potom platí následující.*

(i) *Pro různé body A jsou všechny trojúhelníky OAA' podobné.*
(ii) *Libovolný trojúhelník OAA' zpětně jednoznačně určuje spirální podobnost $\mathcal{S}(O, \overrightarrow{\omega}, k)$.*

Tvrzení 6. (Konstrukce středu; existence) *Buď $ABBA'$ čtyřúhelník takový, že se přímky AB a $A'B'$ protínají v bodě Q. Potom druhý průsečík O kružnic opsaných trojúhelníkům QAA' a QBB' je střed spirální podobnosti*

$$\mathcal{S}\left(O, \overrightarrow{\sphericalangle AOA'}, \tfrac{|AB|}{|A'B'|}\right),$$

která zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$.

Tvrzení 7. (Průsečík čtyř kružnic) *Buď $ABB'A'$ čtyřúhelník s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a $A'B'$ označme Q, průsečík přímek AA' a BB' označme R. Potom střed spirální podobnosti O, která zobrazuje $A \to A'$ a $B \to B'$, je průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'Q$, $BB'Q$, ABR a $A'B'R$.*

Cvičení

Cvičení 1. Na stěně visí dvoje hodiny, jedny jdou o čtvrthodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 2. Kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Bodem A se otáčí přímka, která protíná kružnici k podruhé v bodě K a l podruhé v L. Jakou množinu vykresluje střed úsečky KL?

Cvičení 3. Po třech různoběžných přímkách se rovnoměrně pohybují body A, B, C. Ukažte, že pokud jsou ve dvou časech t_1, t_2 trojúhelníky ABC podobné, tak už jsou podobné v každém okamžiku.

Příklady

Příklad 3. (Simpsonova přímka) Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Ukažte, že paty kolmic z D postupně na přímky AB, AC, BC leží na jedné přímce.

Příklad 4. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a nechť E, F jsou body postupně na stranách AD, BC takové, že dělí strany ve stejném poměru $|AE| : |ED| = |BF| : |FC|$. Přímka EF protíná přímky BA a CD postupně v bodech S a T. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům SAE, SBF, TCF a TDE mají společný bod.

(USAMO 2006)

Příklad 5. ABC je ostroúhlý trojúhelník s výškou AD. Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že X, D, Y leží na jedné přímce a body X, D, Y, B jsou po dvou různé. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY. Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé.

(MKS 27–3–8)

Příklad 6. Stranám AB a BC trojúhelníka ABC připíšeme zvenčí podobné pravoúhelníky $BKLC$ a $MNBA$. Ukažte, že přímky NC, ML a AK procházejí jedním bodem.

Příklad. Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který není lichoběžník. Na stranách AB a CD jsou body E a F, které dělí své strany ve stejném poměru $|AE| : |EB| = |CF| : |FD|$. Průsečíky úhlopříček a přímky EF označme P, Q, R. Potom pro různé polohy bodu E procházejí kružnice opsané trojúhelníku PQR ještě jedním pevným bodem (různým od průsečíku úhlopříček P). (Zobecnění IMO 2005)

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je podmnožinou příspěvku *Spirální podobnost* (Domaslav 2010) od Franty Konopeckého, jemuž tímto děkuji.