Soustavy rovnic

Jarda Hančl

Úvod

Ideou této přednášky je seznámit podrobněji posluchače s problematikou řešení složitějších (nestředoškolských) soustav rovnic. Úlohy jsou podobné těm, které se vyskytují v MO, a proto se přednáška bude hodit především těm, kteří umí řešit rovnice jen standardními způsoby.

Pomineme-li základní metody řešení soustav rovnic, jejichž jedinou myšlenkou je dosadit do nějakého vzorce, či upravovat hnusnou matici až do svítání, zbude pár metod, které všechny vyžadují myšlenku.

Za prvé se nabízí metoda substituce. Tu však budeme používat jen okrajově a vrhneme se přímo na zajímavější metody, kterýmižto jsou následující:

Symetrické mnohočleny

Tato metoda se používá pouze v případě, je-li rovnice symetrická vzhledem ke všem proměnným. Jinak řečeno, zaměníme-li proměnné dostaneme stejnou rovnici. Poté používáme substituci $s_1 = x_1+x_2$, $s_2 = x_1x_2$ (tvar substituce závisí na počtu neznámých).

Příklad 1. Řešte v reálných číslech:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{13}{6}$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

Iracionální rovnice

Zde ukáži jen jednu metodu, která se může hodit, pokud člověk nechce strávit s jednou rovnicí mládí. Metodu budu demonstrovat na příkladu.

Příklad 2.

$$\sqrt{2x^2+5x-9} - \sqrt{2x^2+5x-2} = 1$$

Odhady nerovnostmi

Tato metoda je hodně intuitivní. Využívá se většinou v soustavách, které nám tak trochu připomínají nějakou známou nerovnost. Neexistuje tedy pravidlo, musí nám vystačit první pohled.

Příklad 3. V reálných číslech vyřešte:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \cdots + \frac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2$$

Určení minim a maxim funkcí, hledání hodnot výrazů

Následující téma není přímo o řešení soustav, ale metody, které se při nich používají, se často mohou při řešení soustav rovnic hodit.

Příklad 4. Určete maximum výrazu:

$$(1 + \sin x)(1 + \cos x)$$

Příklad 5. Pro $x + y + z = 8$ určete minimum výrazu

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{4 + y^2} + \sqrt{9 + z^2}$$

Příklad 6. Určete všechny hodnoty výrazu

$$\frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

pro x, y reálné splňující $1 \leq x + y$.

Invarianty v rovnicích

Jednoduše řečeno, invariant je něco, co se za určitých podmínek nemění. V rovnicích budeme chápat invariant jako vlastnost výrazu. Tato vlastnost je specifická tím, že za určitých změn podmínek v zadání je hodnota výrazu stále stejná. Pro srozumitelnost zase uvedu na příkladu.

Příklad 7.

$$x = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$y = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Příklady

V reálných číslech řešte následující soustavy:

Příklad 8.

$$\sin x = \cos y$$

$$\sin y = \cos z$$

$$\sin z = \cos x$$

Příklad 9.

$$x^2 = y + z + 2$$

$$y^2 = z + x + 2$$

$$z^2 = x + y + 2$$

Příklad 10.

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 3$$

$$x + y + z \leq 12$$

Příklad 11.

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + y^7$$

$$(1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) = 1 + x^7$$

Příklad 12. Určete p, pro které má následující soustava právě 1 řešení.

$$(x - y)^2 = p^2$$

$$x^3 - y^3 = 16$$

Příklad 13. Pro $xyz = 1$ určete hodnoty výrazu

$$V = \frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}$$