

ABSTRAKT. V příspěvku najdete spoustu příkladů na soustavy rovnic řazených dle obtížnosti a spoustu tipů, jak na ně. Na přednášce se ale dozvíte něco navíc, a to jak počítat různé na první pohled nesnadné rovnice systémem symetrických mnohočlenů a také řešení příkladů obsažených ve sborníčku.

Soustavy rovnic jsou esenciální součástí algebry. Na jejich řešení se používá spousta metod a na přednášce si ukážeme základní a mírně pokročilé metody jejich řešení. Tedy žádná příliš vysokoškolská matematika, ale nebude to ani něco, co se ukazuje ve škole (s výjimkou Keplerova gymnázia v Praze). Tato přednáška je pojata jako nalejvárna z rovnic, takže po ní si budete s každou rovnicí na potkání tykat. Zde si můžete zkusit pár příkladů, ať vidíte, jak na tom jste:

Příklad 1. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= z, \\z^2 + x^2 &= y, \\z^2 + y^2 &= x.\end{aligned}$$

Příklad 2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \\x^4 + y^4 &= 2.\end{aligned}$$

Příklad 3. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$\begin{aligned}x + \frac{2}{x} &= 2z, \\y + \frac{2}{y} &= 2x, \\z + \frac{2}{z} &= 2y.\end{aligned}$$

Kromě středoškolských algebraických metod (máte rovnici a upravujete ji) můžete jednotlivé rovnice vzájemně sčítat (po dvou, třech nebo rovnou všechny), násobit anebo jednu vyjádřit a dosadit do ostatních. Dále můžete použít pěkné a hlavně známé vzorce (ono se to nezdá, ale známý součet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se používá až v jedné pětině všech rovnic s goniometrickými funkcemi), nebo uspořádat dle velikostí jednotlivých proměnných, které se v příkladě vyskytují, a nebo

KLÍČOVÁ SLOVA. Soustavy rovnic, cyklické soustavy rovnic, symetrické mnohočleny, rovnice

nakonec použít odhady podle nerovností (AG nerovnost, součet čtverců). Ještě se dají rovnice řešit metodou symetrických mnohočlenů, kterou si ukážeme přímo na přednášce. A nyní pár příkladů (které budou (dle vašeho zájmu) předvedeny na přednášce):

Lehčí příklady

Příklad 4. Řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$

$$y^2 + 1 = 2z,$$

$$z^2 + 1 = 2x.$$

Příklad 5. Řešte soustavu rovnic (alespoň dvěma způsoby)

$$x^2 = yz,$$

$$y^2 = zx,$$

$$z^2 = xy.$$

Příklad 6. Řešte soustavu rovnic

$$2x + y + 3z = k,$$

$$2y + z + 3x = k,$$

$$2z + x + 3y = k.$$

Příklad 7. Řešte soustavu rovnic

$$x^2 = y + z + 2,$$

$$y^2 = z + x + 2,$$

$$z^2 = x + y + 2.$$

Středně těžké příklady

Příklad 8. Řešte soustavu rovnic

$$\sin x = \cos y,$$

$$\sin y = \cos z,$$

$$\sin z = \cos x.$$

Příklad 9. Řešte soustavu rovnic

$$x = y^3 + 1,$$

$$y = z^3 + 1,$$

$$z = x^3 + 1.$$

Příklad 10. Řešte soustavu rovnic

$$x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2},$$

$$y + \frac{1}{y} = \frac{2}{z^2},$$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{x^2}.$$

Příklad 11. Najděte hodnotu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, když:

$$x + y + z = 5,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 15,$$

$$xy = z^2.$$

Těžké příklady

Příklad 12. (Polská MO) Řešte soustavu rovnic

$$x^5 = 5y^3 - 4z,$$

$$y^5 = 5z^3 - 4x,$$

$$z^5 = 5x^3 - 4y.$$

Příklad 13. Řešte soustavu rovnic

$$x(y + z + 1) = y^2 + z^2 - 5,$$

$$y(z + x + 1) = z^2 + x^2 - 5,$$

$$z(x + y + 1) = x^2 + y^2 - 5.$$

Příklad 14. Řešte soustavu rovnic

$$x + y = a,$$

$$x^5 + y^5 = a^5.$$

Příklad 15. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3.\end{aligned}$$

Příklad 16. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= y^2, \\ \sin^2 y + \cos^2 x &= x^2.\end{aligned}$$