Součty čtverců

Robert Šámal

Úvod a značení

Možná jsi už viděl vzoreček

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a možná tě napadla otázka, jak se na takový vzoreček přijde. Přesně o tom pojednává tato přednáška.

Zápis se třemi tečkami má své výhody, často je však lepší použít zápis pomocí $\sum$. Místo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (kde a_i jsou libovolná čísla) budeme psát $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, případně též $\sum\limits_{1 \le k \le n} a_k$. Námi zkoumaný součet bychom tedy mohli zapsat jako $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Metody sčítání

Nyní si na příkladu součtu čtverců ukážeme několik obecných metod na hledání hodnot různých sum. Všude budeme značit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

1. metoda: Uhodni výsledek a dokaž indukcí

Výše uvedený vzoreček nás mohl prostě napadnout, získali jsme ho experimentováním — zkoušením různých jednoduchých vzorečků pro malá n, případně našli v nějaké moudré knize. Sice to není takový postup, jaký bychom chtěli, ale je dobré si uvědomit, že pokud se nám něco takového podaří, máme většinou vyhráno, rutinním použitím indukce ověříme, že jsme skutečně našli správnou odpověď.

2. metoda: Rozruš sumu

Označme $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$. Dvěma způsoby vyjádříme T_{n+1}:

$$\begin{aligned} T_n + (n+1)^3 = T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 &= \sum_{k=0}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &= T_n + 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \end{aligned}$$

a odsud snadnou úpravou dostaneme S_n. A jak jsme přišli na nápad začít s T_n? Prostě jsme to nejdřív zkusili přímo s S_n a zjistili jsme, že jsme tak sečetli $1 + 2 + \cdots + n$.

3. metoda: Vytvoř si repertoár

Hledaná posloupnost S_n splňuje *rekurentní formuli*

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= S_{n-1} + n^2 \quad \text{pro } n > 0. \end{aligned}$$

Zkusíme hledat řešení obecnější rekurence (vytvoříme si tak celý repertoár rekurencí, které umíme vyřešit)

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2 \quad \text{pro } n > 0. \end{aligned}$$

Po krátkém zamyšlení zjistíme, že toto řešení má tvar $R_n = A_n\alpha + B_n\beta + C_n\gamma + D_n\delta$ pro nějaká čísla A_n, B_n, C_n a D_n. Dosazením konkrétních R_n (třeba $R_n = 1$, $R_n = n$, $R_n = n^2$ a $R_n = n^3$) zjistíme, jak tato čísla vypadají. Pak si už jen uvědomíme, že S_n je speciální případ R_n pro $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 1)$, čili $S_n = D_n$.

4. metoda: Nahraď sumu integrálem

Z obrázku je vidět, že $S_n \doteq \int_0^n x^2\,\mathrm{d}x = n^3/3$ (přesněji $S_{n-1} < \int_0^n x^2\,\mathrm{d}x < S_n$). Jako rozumný nápad tedy vypadá psát $S_n = n^3/3 + E_n$, kde E_n je chyba našeho hrubého odhadu. Zkusme najít rekurentní vztah pro E_n:

$$E_n = S_n - \tfrac{1}{3}n^3 = S_{n-1} + n^2 - \tfrac{1}{3}n^3 = \tfrac{1}{3}(n-1)^3 + E_{n-1} + n^2 - \tfrac{1}{3}n^3 = E_{n-1} + n - \tfrac{1}{3}.$$

Ejhle: k vyřešení tohoto rekurentního vztahu potřebujeme sečíst jen aritmetickou řadu.

5. metoda: Rozviň a sluč

Někdy je výhodné si úlohu zdánlivě zesložitit. V oblasti sčítání sum spočívá konkrétní provedení zpravidla v nahrazení jednoduché sumy dvojitou a prohození pořadí obou sum.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \le k \le n} k.k = \sum_{1 \le k \le n} \left(k \sum_{1 \le j \le k} 1 \right) \\ &= \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j \le k \le n} k \\ &= \sum_{1 \le j \le n} \frac{n+j}{2}(n-j+1) = \tfrac{1}{2} \sum_{1 \le j \le n} n^2 - j^2 + n + j \\ &= \tfrac{1}{2}n(n^2+n) - \tfrac{1}{2}S_n + \tfrac{1}{4}n(n+1) \end{aligned}$$

Snadnou úpravou odsud zjistíme S_n.

6. metoda: Použij konečný kalkulus

Možná bude na přednášce.

7. metoda: Použij vytvořující funkce

To by bylo na jinou přednášku (a ne jednu). Jedná se zhruba o toto: máme nějakou posloupnost čísel S_n, vytvoříme funkci

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k.$$

A teď zkoumáme S_n za užití $s(x)$.