

Sinová věta

Tomáš „Šavlík“ Pavlík

ABSTRAKT. V přednášce se budeme zabývat použitím a skládáním sinových vět v důkazových úlohách.

Věta 1. (Sinová věta) *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ , stranami a, b, c a poloměrem kružnice opsané R platí*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Úlohy na zahřátí

Příklad 2. Mějme trojúhelník ABC , průsečík osy úhlu ACB se stranou AB označme P . Dokažte, že $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Příklad 3. Je dán trojúhelník ABC , střed strany BC označme M . Nechť na straně AB leží bod P . Označme Q průsečík AM a PC . Dokažte, že $|CQ| = |AB|$ pokud víte, že $|AP| = |PQ|$.

Příklad 4. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC , jeho střed označme G . Na straně AB leží bod D takový, že $|AG| = |AD|$. Postupně označme E a F průsečíky přímky DG s AC a BC . Dokažte, že $|DE| = |EF|$.

Úlohy střední obtížnosti

Příklad 5. V rovnoběžníku $TUVW$ jsou na stranách TU a UV po řadě body X, Y tak, že $|TX| = |VY| > 0$. Přímky TY a VX se protínají v bodě P . Dokažte, že P leží na ose úhlu VWT .

Příklad 6. Mějme tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P . Dokažte, že platí

$$|AP| \cdot \sin \alpha + |CP| \cdot \sin \gamma = |BP| \cdot \sin \beta + |DP| \cdot \sin \delta.$$

Příklad 7. Je dán trojúhelník ABC . Buď S střed strany AB a V ortocentrum $\triangle ABC$. Přímka p je kolmice na SV procházející bodem V . Její průsečíky s přímkami AC, BC označme P, Q . Dokažte, že $|VP| = |VQ|$.

KLÍČOVÁ SLOVA. geometrie trojúhelníku, sinová věta, trigonometrie

Těžké úlohy

Příklad 8. Máme zadaný pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ takový, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$. Na straně AD najdeme bod N takový, že $\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AB|}{|CD|}$. Dokažte, že $|AB| + |CD| = |AD|$, pokud víte, že $|\sphericalangle BNC| = 90^\circ$.

Věta 9. (Cevova věta) *V trojúhelníku ABC mějme body $X \in BC$, $Y \in AC$, $Z \in AB$. Pak AX , BY a CZ se protínají v jednom bodě, právě když platí*

$$\frac{|BX|}{|CX|} \frac{|CY|}{|AY|} \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1.$$

Příklad 10. Mějme trojúhelník ABC . Na výšce AX zvolme bod P . Dále $K = BP \cap AC$ a $L = CP \cap AB$. Dokažte, že $|\sphericalangle AXK| = |\sphericalangle AXL|$.

Příklad 11. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC ($\alpha = \beta = 50^\circ$). Na straně AB nalezneme bod K tak, že $|\sphericalangle ACK| = 50^\circ$, dále sestrojme bod L na straně BC tak, aby $|\sphericalangle CAL| = 30^\circ$. Určete $|\sphericalangle ALK|$.

Literatura

Přednáška čerpá příklady ze semináře Michala „Kennyho“ Rolínka *Umění vidět v matematice* a ze stránek www.mathlinks.ro/Forum.