Simsonova přímka

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek obsahuje některé vlastnosti Simsonovy přímky a řadu úloh, k jejichž řešení lze Simsonovu přímku využít.

Věta. (Simsonova přímka) *Označme K, L, M paty kolmic vedených z bodu P na strany trojúhelníka BC, CA, AB trojúhelníka ABC. Pak body K, L, M leží v přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Této přímce se říká Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC.*

Zajímavost. (Šikmá Simsonova přímka) *Body leží na přímce i pokud v předchozím tvrzení nahradíme kolmice přímkami, které svírají s příslušnými stranami stejný úhel (orientovaný).*

Cvičení. Simsonovou přímkou vrcholu trojúhelníka je výška na protější stranu.

Cvičení. Simsonovou přímkou obrazu vrcholu podle středu kružnice opsané je protější strana.

Tvrzení 1. *Je-li H ortocentrum, pak Simsonova přímka bodu P půlí úsečku PH.*

Tvrzení 2. *Je-li S střed kružnice opsané, pak Simsonovy přímky bodů P a Q svírají úhel $\frac{1}{2}|\sphericalangle PSQ|$.*

Důsledek. *Simsonovy přímky protějších bodů jsou na sebe kolmé a protínají se na Feuerbachově kružnici.*

Důsledek. *Mají-li dva trojúhelníky společnou kružnici opsanou, pak úhel Simsonových přímek bodu P vzhledem k těmto trojúhelníkům nezávisí na volbě bodu P.*

Příklady

Příklad 1. (Kamarád bodu na kružnici) Pro bod P na kružnici opsané trojúhelníku ABC platí, že obrazy přímek PA, PB, PC v osových souměrnostech postupně podle os úhlů BAC, CBA, ACB jsou rovnoběžné a navíc svírají se Simsonovou přímkou pravý úhel.

Příklad 2. Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně

K, L, M. Ukažte, že úhel $\sphericalangle LKM$ má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec. (MO 58-III-2)

Příklad 3. (Miquelův bod) Mějme čtyři přímky v obecné poloze (žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě). Každá trojice z nich definuje trojúhelník a uvážíme-li kružnice opsané těmto čtyřem trojúhelníkům, protínají se v jednom bodě.

Zajímavost. (Cliffordův řetízek) *Pět Miquelových bodů definovaných čtveřicemi z pěti přímek v obecné poloze leží na kružnici, šest těchto kružnic daných všemi péticemi přímek ze šesti přímek v obecné poloze se protínají v jednom bodě atd.*

Příklad 4. Na přímce jsou dány body A, B, C a mimo ni bod P. Dokažte, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku tvořenému středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABP, BCP, ACP.

Příklad 5. V trojúhelníku ABC protíná osa úhlu BAC protější stranu v bodě D. Označme P, Q paty kolmic vedených bodem D na strany AB, AC. Kolmice na BC z bodu D protne PQ v bodě X. Ukažte, že X leží na těžnici z bodu A.

Příklad 6. Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice se středem O a průměrem AB. Označme P, Q, R, S postupně paty kolmic z bodu Y na přímky AX, BX, AZ, BZ. Dokažte, že velikost ostrého úhlu, který svírají přímky PQ a RS, je rovna $\frac{1}{2}|\sphericalangle XOZ|$. (USAMO 2010)

Příklad 7. Nechť kružnice vepsaná trojúhelníku ABC má střed I a dotýká se stran BC, CA, AB postupně v bodech D, E, F. Nechť dále M je střed strany BC. Pak se přímky EF, DI a AM protínají v jednom bodě.

Příklad 8. Na kružnici opsané trojúhelníku ABC leží body P, Q tak, aby $PQ \parallel BC$. Paty kolmic z bodů P a Q na AB, respektive AC označme postupně X_1, Y_1, respektive X_2, Y_2. Dokažte, že přímky X_1X_2 a Y_1Y_2 se protínají na výšce na stranu BC.

Příklad 9. Uvažujme pět bodů A, B, C, D, E takových, že $ABCD$ je rovnoběžník a $BCED$ je tětivový čtyřúhelník. Přímka l prochází bodem A, protíná úsečku DC v jejím vnitřním bodě F a přímku BC v bodě G. Platí-li $|EF| = |EG| = |EC|$, ukažte, že l je osou úhlu DAB. (IMO 2007)

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník a g je přímka procházející bodem A, která protíná stranu BC v bodě M a přímku CD v bodě N. Označme I_1, I_2, I_3 středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABM, MNC a NDA. Ukažte, že ortocentrum trojúhelníka $I_1I_2I_3$ leží na přímce g. (IMO Shortlist 2009, G8)

Příklad 11. Označme H ortocentrum ostroúhlého trojúhelníka ABC a k jeho kružnici opsanou. Přímka procházející bodem H protne kratší oblouky AC, BC kružnice k postupně v bodech M, P. Rovnoběžka se Simsonovou přímkou bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC vedená bodem M protne k v bodě K, rovnoběžka s BC vedená bodem P protne k podruhé v bodě Q. Označme J průsečík BC a KQ. Dokažte, že trojúhelník KJM je rovnoramenný. (China TST 2011)

Příklad 12. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a ω kružnice jemu opsaná. Dále nechť t je tečna kružnice ω a t_a, t_b, t_c jsou po řadě obrazy přímky t v osové symetrii podle přímek BC, CA, AB. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami t_a, t_b, t_c se dotýká kružnice ω. (IMO 2011, 6)

Návody

1. Pro kolmost obrazu přímky PC uvažte tětivový čtyřúhelník $PCKL$.

2. Dokreslete paty kolmic z P na AD a BC. Nalezněte Simsonovy přímky a uvědomte si, že $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle APB|$.

3. Protněte dvě z kružnic v bodě P a uvědomte si, že paty kolmic v jednotlivých trojúhelnících definují stejné přímky.

4. Interpretujte středy úseček AP, BP, CP jako paty kolmic.

5. Spusťte kolmici ze středu kratšího oblouku BC a použijte stejnolehlost.

6. Všimněte si, že PQ a RS se protínají na AB.

7. Za pomoci Simsonovy věty ukažte, že body A, M a průsečík DI a EF leží na jedné přímce.

8. Dokreslete kolmice z P, Q na BC a najděte rovnoběžníky.

9. Uvažte Simsonovu přímku bodu E vzhledem k trojúhelníku BCD a vyúhlete.

10. Využijte Tvrzení 1 pro Simsonovu přímku bodu C vzhledem k trojúhelníku $I_1I_2I_3$.

11. Označte $S = MP \cap BC$ a uvědomte si, že stačí, aby $KSJM$ byl tětivový.

12. Označme T dotyk t s ω, A' průsečík t_b s t_c a analogicky B' a C'.

(i) Body X, Y, Z definujeme jako obrazy T podle BC, CA, AB. Dokažte, že leží v přímce.
(ii) Dokažte $\sphericalangle(XC, XC') = \sphericalangle(YC, YC')$.
(iii) Označte K Miquelův bod pro přímky $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, XY.
(iv) Doúhlete, že K je hledaný bod dotyku.

Literatura a zdroje

[1] Pepa Tkadlec: *Simsonova Přímka*, Hojsova Stráž, 2011.
[2] Martina Vaváčková: *Simsonova Přímka*, Zásada, 2014.
[3] *www.artofproblemsolving.com*