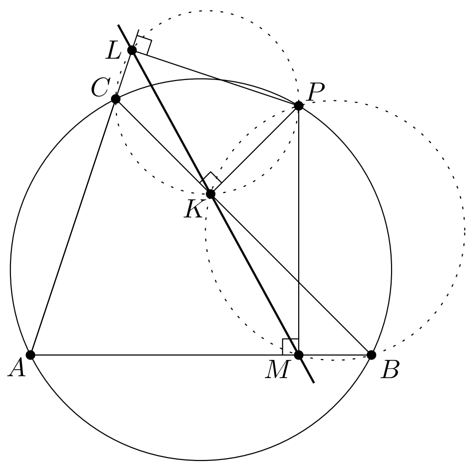
Simsonova přímka

Pepa Tkadlec

Úlohy, v nichž lze s výhodou uplatnit tvrzení o Simsonově přímce, se pravidelně vyskytují v národních i mezinárodních matematických olympiádách. Bližší seznámení s touto tematikou tedy určitě stojí za to.

Teorie

Tvrzení 1. (Simsonova přímka) *Označme K, L, M paty kolmic vedených z bodu P na strany trojúhelníka ABC. Pak body K, L, M leží v přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Této přímce se říká Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC.*



Než se pustíme do příkladů, v nichž toto tvrzení využijeme, uveďme ještě dvě další vlastnosti Simsonovy přímky. Obě na přednášce dokážeme.

Klíčová slova. planimetrie, Simsonova přímka

Tvrzení 2. *Označme H průsečík výšek trojúhelníka ABC a P bod na jeho kružnici opsané. Pak Simsonova přímka bodu P půlí úsečku PH.*

Tvrzení 3. *Simsonovy přímky odpovídající bodům P, P' na kružnici opsané trojúhelníku ABC svírají úhel rovný polovině středového úhlu příslušejícího oblouku PP'. Speciálně jsou tedy Simsonovy přímky „protějších“ bodů na sebe kolmé a díky předešlému tvrzení se protínají na Feuerbachově kružnici trojúhelníka ABC.*

Příklady

Příklad 1. Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Označme postupně P, Q, R, S paty kolmic vedených bodem Y k přímkám AX, BX, AZ, BZ. Dokažte, že velikost ostrého úhlu svíraného přímkami PQ a RS je rovna polovině velikosti úhlu XOZ, kde O je střed úsečky AB. (USAMO 2010)

Příklad 2. Osa úhlu BAC prtíná protější stranu trojúhelníka ABC v bodě D. Označme P, Q paty kolmic vedených bodem D na strany AB, AC. Kolmice na BC bodem D protne PQ v bodě X. Ukažte, že X leží na těžnici AA_1.

Příklad 3. Na přímce jsou dány body ABC a mimo ní bod P. Dokažte, že bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku tvořenému středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABP, BCP, ACP.

Příklad 4. Uvažujme pět bodů A, B, C, D, E takových, že $ABCD$ je rovnoběžník a čtyřúhelník $BCED$ je tětivový. Přímka ℓ prochází bodem A, protíná úsečku DC v jejím vnitřním bodě F a přímku BC v bodě G. Předpokládejme, že platí $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokažte, že přímka ℓ je osou úhlu DAB. (IMO 2007)

Příklad 5. Je dán trojúhelník ABC a přímka p procházející jeho průsečíkem výšek. Dokažte, že obrazy přímky p v osových souměrnostech podle stran $\triangle ABC$ procházejí jedním bodem na kružnici opsané trojúhelníka ABC.

Příklad 6. Přímka ℓ neprotíná kružnici k se středem O. Bod E leží na přímce ℓ tak, že $OE \perp \ell$. Na ℓ zvolíme bod M libovolně. Tečny vedené bodem M ke kružnici k se jí dotýkají v bodech A, B. Označme C, D paty kolmic spuštěných z bodu E na přímky MA, MB. Konečně označme F průsečík přímek CD a OE. Ukažte, že pozice bodu F nezávisí na volbě bodu M. (IMO shortlist 1994)

Příklad 7. Označme H průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníka ABC a k jeho kružnici opsanou. Přímka procházející bodem H protne kratší oblouky AC, BC kružnice k po řadě v bodech M, P. Rovnoběžka se Simsonovou přímkou bodu P vzhledem k $\triangle ABC$ vedená bodem M protne k v bodě K, rovnoběžka s BC vedená bodem P protne k podruhé v bodě Q. Označme J průsečík BC a KQ. Dokažte, že $\triangle KJM$ je rovnoramenný. (China TST 2011)

Literatura

[1] N. Altshiller-Court: *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, New York, 2007.

Návody

Návod k tvrzení 1. Vyúhlete za pomoci naznačených tětivových čtyřúhelníků.

Návod k tvrzení 2. Zobrazte P přes strany. Jelikož obrazy H přes strany padnou na kružnici opsanou, tvoří vždy jeden obraz, bod H a dva vrcholy trojúhelníka tětivový čtyřúhelník. Za použití osové souměrnosti doúhlete.

Návod k tvrzení 3. Uvažte body P a P' pootočené na kružnici ospané o úhel φ a ukažte, že Simsonovy přímky svírají se „svislicí“ úhel lišící se rovněž o φ. Pro poslední část si uvědomte, že Feuerbachova kružnice vzniká přiblížením opsané kružnice na polovic k ortocentru.

Návod 1. Přímky PQ, RS obě procházejí patou z bodu Y na průměr AB. Doúhlete.

Návod 2. Spusťe kolmice ze středu kratšího oblouku BC a „přitáhněte“ vzniklé body stejnolehlostí k bodu A.

Návod 3. Díky stejnolehlosti leží středy úseček PA, PB, PC v přímce. Interpretujte je jako paty vhodných kolmic.

Návod 4. Dokreslete středy FC, GC a rovnoběžníka. Uvažte stejnolehlost z bodu C na polovic. Je-li EM kolmá na BC, je E střed oblouku jisté kružnice. Zbytek doúhlete.

Návod 5. Využijte Tvrzení 2.

Návod 6. Průsečík AB a OE je pevný (polára, nebo podobné trojúhelníky). Dokreslete třetí patu G a ukažte, že F je střed přepony pevné úsečky EG dokázáním rovnosti dvou úhlů.

Návod 7. Označte $S = MP \cap BC$ a uvědomte si, že stačí mít $KSJM$ tětivový. Pomůže vám vyúhlit si, že MP je Simsonova přímka bodu K vzdálená od něj na dvojnásobek.