Shodná zobrazení

Martin „E.T.“ Sýkora

Abstrakt. Příspěvek obsahuje několik příkladů, k jejichž řešení je vhodné využít shodná zobrazení.

Na přednášce se zaměříme převážně na řešení mnoha úloh a osvojení běžných metod, v nichž nám pomáhají shodná zobrazení. Teorii poněkud odbudeme, abychom měli více času na příklady. Koho zajímají hlubší poznatky k tomuto tématu, může si přečíst seriál z 31. ročníku od Pepy Tkadlece a Mirka Olšáka o geometrických zobrazeních.

S čím budeme pracovat

Definice. Shodné zobrazení je zobrazení s z roviny ψ do roviny ψ, které zachovává délky úseček, tedy pro všechna $A, B \in \psi$ platí $|AB| = |s(A)s(B)|$.

Tvrzení. *Každé shodné zobrazení je buď osová souměrnost, otočení, posunutí, nebo posunutá souměrnost.*

A jdeme na to

Příklad 1. Mějme v rovině kružnici, přímku a bod. Nalezněte všechny úsečky, které mají jeden koncový bod na dané kružnici, druhý na dané přímce a střed v daném bodě.

Příklad 2. V rovině je dána přímka p a body A, B v jedné polorovině jí určené. Nalezněte bod $X \in p$ takový, že délka $|AX| + |XB|$ je nejmenší možná.

Příklad 3. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC a bod P. Dokažte, že délky úseček PA, PB a PC tvoří délky stran nějakého (i degenerovaného) trojúhelníku. Degenerovaný případ nastává, pokud P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (Pompeiuova věta)

Příklad 4. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li délky jeho čtyř stran a, b, c, d a odchylku ω přímek a, c.

Příklad 5. V rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod P tak, že $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180°$. Dokažte, že $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle ADP|$.

Příklad 6. Na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC nalezněme bod X tak, aby $|BX| = |AC|$. Označme Y průsečík přímky BX a strany AC. Ukažte, že trojúhelník CXY je rovnoramenný.

Příklad 7. Jednotkové kružnice k a l se dotýkají v bodě T. Kružnice m o poloměru 2 má střed na kružnici k a dotýká se jí v bodě B. Ukažte, že přímka BT prochází jedním z průsečíků kružnic l a m.

Příklad 8. Sestrojte lomenou čáru $ABCDE$, jsou-li dány body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, které jsou středy úseček AB, BC, CD, DE, EA.

Příklad 9. Uvnitř pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C je dán bod P. Ukažte, že úsečky o délkách $|PA|$, $|PB|$ a $|PC|\sqrt{2}$ tvoří strany trojúhelníku.

Příklad 10. Uvnitř ostrého úhlu s rameny p, q je dán bod A. Nalezněte body P na p a Q na q tak, aby $|AP|+|PQ|+|QA|$ bylo minimální. Co se stane, pokud bude zadaný úhel pravý nebo tupý?

Příklad 11. Existuje útvar se dvěma středy souměrnosti?

Příklad 12. Uvnitř čtverce $ABCD$ je dán bod P tak, že $|PD| = 1$, $|PA| = 2$ a $|PB| = 3$. Určete velikost úhlu APD.

Příklad 13. V rovině je dána přímka p a mimo ni (ve stejné polorovině) dva různé body A, B. Sestrojte na přímce p bod X tak, aby odchylka přímky AX od přímky p byla dvojnásobkem odchylky přímky BX od přímky p.

Příklad 14. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ vznikl slepením rovnostranného trojúhelníku AEF o straně a, rovnoběžníku $ABDE$ splňujícího $|AB| = 1$ a trojúhelníku BCD splňujícího $|BC| + |CD| = 2$. Navíc platí $|CF| = 3$. V závislosti na a určete obsah šestiúhelníku $ABCDEF$.

Příklad 15. Najděte body K, L a M, z nichž každý leží na jedné straně daného trojúhelníku a pro které je $|KL| + |LM| + |MK|$ minimální.

Příklad 16. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho průsečík výšek H. Ukažte, že obrazy bodu H v osových souměrnostech podle stran a středových souměrnostech podle středů stran trojúhelníku ABC leží na kružnici jemu opsané.

Příklad 17. (Fermatův bod) Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Najděte bod X takový, že $|AX| + |BX| + |CX|$ je minimální.

Poděkování a zdroje

Rád bych poděkoval *Pepovi Tkadlecovi* a *Mirkovi Olšákovi*, z jejichž seriálu (31. ročník) jsem čerpal. Dále dlužím díky *Frantovi Konopeckému* za příspěvek *Geometrická zobrazení*, kterým jsem se také nechal inspirovat.