Shodná zobrazení

Martin Tancer

Mnoho geometrických úloh lze řešit pomocí shodných zobrazení. Na přednášce bych ukázal nějaké postupy, jak úlohy řešit. Přednáška bude zaměřena především na řešení příkladů, proto obecných poznatků bude poměrně málo.

Definice. *Shodným zobrazením (z roviny do roviny) budeme rozumět zobrazení $X \to X'$ splňující $|AB| = |A'B'|$ pro každé dva body A, B.*

Definice. *Identické zobrazení, posunutí a otočení nazveme zobrazeními zachovávajícími orientaci. Osovou souměrnost nazveme zobrazením nezachovávajícím orientaci.*

Tvrzení. Každé shodné zobrazení je identické zobrazení, posunutí, otočení nebo lze získat složením jednoho z těchto tří zobrazení a osové souměrnosti.

Tvrzení.

(i) Složením dvou shodných zobrazení zachovávajících orientaci dostaneme opět zobrazení zachovávající orientaci.

(ii) Složením dvou shodných zobrazení nezachovávajících orientaci dostaneme zobrazení zachovávající orientaci.

(iii) Složením dvou shodných zobrazení, z nichž jedno orientaci zachovává a druhé ne, dostaneme zobrazení nezachovávající orientaci.

Tvrzení. (speciální případy)

(i) Složením dvou posunutí dostaneme opět posunutí.

(ii) Složením posunutí a otočení o úhel α dostaneme otočení o úhel α (s jiným středem).

(iii) Složením otočení o úhel α a otočení o úhel β dostaneme identitu, je-li $\alpha+\beta$ násobek 360° a mají-li otočení společný střed; posunutí, je-li $\alpha+\beta$ násobek 360° a nemají-li otočení společný střed; otočení o úhel $\alpha+\beta$, není-li $\alpha+\beta$ násobek 360°. (Pozor! Střed otočení může záviset na pořadí, v jakém otáčení skládáme.)

(iv) Složením dvou osových souměrností podél přímek p_1, p_2 dostaneme identitu, je-li $p_1 = p_2$; posunutí, jsou-li p_1 a p_2 rovnoběžné; otočení se středem ve společném průsečíku, jsou-li p_1 a p_2 různoběžné.

Příklad 1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnice k, jejíž střed leží na straně AB a která se dotýká ostatních tří stran BC, CD, DA. Dokažte, že $|AD| + |BC| = |AB|$.

Příklad 2. V rovině je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a libovolný bod P_0. Položme $A_{k+3} = A_k$ pro $k \geq 1$. Nechť bod P_k je obrazem bodu P_{k-1} při otočení o úhel 120°

(po směru hodinových ručiček) kolem středu A_k. Dokažte, že pokud je $P_{2004} = P_0$, potom je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnostranný.

Příklad 3. V rovině je dán trojúhelník PQX. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se kružnice jemu vepsaná dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a bod X ležel na přímce AC.

Příklad 4. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Nalezněte bod X takový, že součet jeho vzdáleností od bodů A, B, C je minimální.

Příklad 5. (Napoleonova věta) K trojúhelníku ABC vně (dovnitř) připišme rovnostranné trojúhelníky a spojme těžiště těchto rovnostranných trojúhelníků. Dokažte, že vznikne rovnostranný trojúhelník.

Příklad 6. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník splňující

$$|AB| = |BC| = |CD|, \quad |DE| = |EF| = |FA| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA| = 60^\circ.$$

Dále nechť body G, H uvnitř $ABCDEF$ splňují

$$|\sphericalangle AGB| = |\sphericalangle DHE| = 120^\circ.$$

Dokažte, že

$$|AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| \geq |CF|.$$