Seznámení s topologií

Anička Doležalová

Abstrakt. V přednášce se seznámíme s úplnými základy obecné topologie a s oddělovacími axiomy. V jistém smyslu se jedná o zobecnění metrických prostorů, kde místo metriky budeme mít jen jakousi slabší strukturu. Ta nám pořád umožní mluvit o takových pojmech jako například spojitost zobrazení.

Definice. *Topologický prostor* je dvojice $(X, \mathcal{T})$, kde X je množina, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ a jsou splněny podmínky

(1) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$,
(2) pokud $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, pak $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$,
(3) pokud $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, pak $\bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$.

Prvky $\mathcal{T}$ nazveme *otevřené množiny*, soubor $\mathcal{T}$ nazveme *topologie*.

Příklad. Rozmyslete si, že se jedná o topologie:

- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (*diskrétní topologie*),
- $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ (*antidiskrétní topologie*),
- pro X nekonečnou množinu $\mathcal{T} = \{T : X \setminus T \text{ je konečná}\} \cup \{\emptyset\}$,
- pro (X, ρ) metrický prostor

  $$\mathcal{T} = \{T : \text{ pro každé } x \in T \text{ existuje } \varepsilon > 0 \text{ takové, že } U(x, \varepsilon) \subseteq T\},$$

  kde $U(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ (*topologie generovaná metrikou*),
- pro $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ (*Sierpińského prostor*).

Definice. Množina $V \subseteq X$ je *okolí bodu* $x \in X$, pokud existuje otevřená množina U taková, že $x \in U \subseteq V$.

Tvrzení. *Množina T je otevřená právě tehdy, když každý její bod má nějaké otevřené okolí U takové, že $U \subseteq T$.*

Definice. Soubor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je *báze* topologie $\mathcal{T}$, pokud pro každé $T \in \mathcal{T}$ existuje $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ splňující $T = \bigcup \mathcal{B}'$.

Definice. Soubor $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{T}$ je *lokální báze v bodě* $x \in X$, pokud každý prvek $\mathcal{B}(x)$ obsahuje x a pro každé U okolí x existuje $B \in \mathcal{B}(x)$ splňující $B \subseteq U$.

Tvrzení. *Topologie je jednoznačně určená souborem* $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$*, kde* $\mathcal{B}(x)$ *je lokální báze v bodě* x*.*

Příklad. Topologie na $\mathbb{R}$ s bází $\{U(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ je topologie generovaná metrikou $\rho(x,y) = |x-y|$.

Definice. Mějme $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{S})$ topologické prostory, zobrazení $f\colon X \to Y$ nazveme spojité, pokud pro každou otevřenou množinu v Y je její vzor otevřená množina v X, tj. pro každou $S \in \mathcal{S}$ platí $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$.

Příklad. Každé konstantní zobrazení je spojité.

Příklad. Rozmyslete si: Každé zobrazení z prostoru s diskrétní topologií je spojité. Každé zobrazení do prostoru s antidiskrétní topologií je spojité. Pro zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ se standardní topologií je definice ekvivalentní s „klasickou“ definicí spojitosti, totiž pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Oddělovací axiomy

Definice. Topologický prostor X nazveme

- T_0, pokud pro každá $x \neq y \in X$ existuje otevřená množina U splňující $|U \cap \{x,y\}| = 1$,
- T_1, pokud pro každá $x \neq y \in X$ existuje otevřená množina U splňující $x \in U, y \notin U$,
- T_2 (*Hausdorffův*), pokud pro každá $x \neq y \in X$ existují disjunktní otevřené množiny U, V splňující $x \in U, y \in V$,
- T_3 (*regulární*), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$, $F \subseteq X$ uzavřenou a neobsahující x existují disjunktní otevřené množiny U, V splňující $x \in U, F \subseteq V$,
- $T_{3\frac{1}{2}}$ (*úplně regulární, Tichonovův*), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$, $F \subseteq 1X$ uzavřenou a neobsahující x existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ splňující $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in F$,
- T_4 (*normální*), pokud je T_1 a pro každé $F, H \subseteq X$ disjunktní uzavřené množiny existují disjunktní otevřené množiny U, V splňující $F \subseteq U, H \subseteq V$.

Věta. *Platí* $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$*.*

Poznámka. Topologie generovaná metrikou je T_4. Proto třeba Sierpinského prostor očividně není metrizovatelný (není ani T_1).

Příklad. Najděte prostor, který je T_0, ale ne T_1. Analogicky T_1, ale ne T_2, resp. T_2, ale ne T_3.

Návod. Příklady prvních dvou už jsme viděli. Třetí příklad se dá zkonstruovat třeba pomocí $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, kde okolí racionálních čísel budou obsahovat jen racionální čísla a okolí iracionálních čísel budou obsahovat racionální i iracionální čísla.

Literatura a zdroje

[1] prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.: *Obecná topologie*, MFF UK, ZS 2015/16.