Šestiúhelníky a vektory

Michal „Kenny" Rolínek

Jedním z velmi mocných nástrojů na řešení geometrických úloh jsou vektory. Byť má jejich používání blízko k analytické geometrii, bývají řešení využívající vektory často velice elegantní. Na přednášce si ukážeme i takové příklady, v nichž by syntetické řešení bylo velice náročné, ovšem vektory si hravě poradí. Jak název napovídá, půjde hlavně o příklady v nichž vystupuje nějaký ten šestiúhelník.

Nejprve si dáme několik příkladů na procvičení a pochopení toho, jak vůbec vektory fungují.

Definice. *Těžištěm n-úhelníka $A_1A_2\dots A_n$ rozumíme takový bod G, pro který platí*

$$GA_1 + GA_2 + \cdots + GA_n = 0.$$

Odtud již snadno vyjádříme, že

$$G = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}.$$

Příklad 1. Rozmyslete si, že platí-li pro vektory A, B, C, že

$$A + B + C = 0,$$

pak lze tyto vektory umístit do roviny tak, aby tvořily trojúhelník.

Příklad 2. Formulujte podobnou podmínku pro rovnoběžník.

Příklad 3. Ukažte, že středy stran čtyřúhelníka tvoří rovnoběžník.

Příklad 4. Buď $ABCDEF$ šestiúhelník a A', B', C', D', E', F' postupně těžiště trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB. Ukažte, že šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ má protější strany rovnoběžné a stejně dlouhé.

Příklad 5. Buď G těžiště trojúhelníka ABC a X libovolný bod uvnitř něj. Ukažte, že platí

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XG}.$$

Příklad 6. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník. Označme $M_1, M_2, \dots M_6$ postupně středy stran $AB, BC, \dots, FA$. Dokažte, že $M_1M_4 \perp M_3M_6$, právě když

$$|M_5M_2|^2 = |M_1M_4|^2 + |M_3M_6|^2.$$

Příklad 7. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník. Označme $M_1, M_2, \dots M_6$ postupně středy stran $AB, BC, \dots, FA$. Ukažte, že trojúhelníky $M_1M_3M_5$, $M_2M_4M_6$ mají společné těžiště.

Tvrzení. (O podobnosti $\triangle$) Buď ABC trojúhelník a u, v, w vektory se součtem 0 (tedy tvořící trojúhelník, například $\triangle UVW$). Pak z každé z následujících podmínek plyne, že $\triangle UVW \sim \triangle ABC$.

$$\text{(1)} \quad \frac{|u|}{|AB|} = \frac{|v|}{|BC|} = \frac{|w|}{|CA|}$$

$$\text{(2)} \quad u \parallel AB, \ v \parallel BC, \ w \parallel CA$$

A naopak, platí-li pro nějaké vektory obě podmínky, pak z nich lze sestavit trojúhelník.

Příklad 8. Buď ABC rovnostranný trojúhelník. Na jeho straně a jsou zvoleny body A_1, A_2, obdobně na stranách b a c jsou body B_1, B_2 a C_1, C_2 tak, aby šestiúhelník $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ měl všechny strany stejně dlouhé. Ukažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 procházejí jedním bodem.

(IMO 2005 - problem 1)

Násobení vektorů I

Nastal čas naše znalosti o vektorech trochu rozšířit. Dosud jsme vektory pouze sčítali, nyní si povíme něco o tom, jak se dají vektory také násobit. Takové součiny existují dokonce dva.

Definice. (Skalární součin) *Máme-li vektory $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, pak číslo $c = a_1b_1 + a_2b_2$ nazveme skalárním součinem vektorů A a B a značíme $A \cdot B$.*

Vlastnosti skalárního součinu

(i) $A \cdot B = B \cdot A$
(ii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(tA) \cdot B = A \cdot (tB) = t(A \cdot B)$
(iii) $A \cdot A = 0 \Leftrightarrow A = 0$ jinak, vždy $A \cdot A > 0$
(iv) $|A| = \sqrt{A \cdot A}$
(v) $A \cdot B = |A| \cdot |B| \cdot \cos\varphi$, kde φ je orientovaný úhel mezi vektory A a B.
(vi) $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A \perp B$

Dá se vytušit, že skalární součin se bude hodit v příkladech, v nichž se vyskytují (nebo mají dokázat) pravé úhly. Ukažme si tedy jak.

Příklad 9. Dokažte pomocí skalárního součinu kosinovou větu.

Příklad 10. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka jsou kolmé, právě když se rovnají součty druhých mocnin protějších stran.

Příklad 11. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka jsou kolmé, právě když se rovnají délky spojnic středů protějších stran.

Příklad 12. Ukažte, že v lichoběžníku platí

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

kde e, f jsou délky úhlopříček.

Příklad 13. Označme M, N, P, Q postupně středy stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníka $ABCD$. Ukažte, že platí

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2\,(|MP|^2 + |NQ|^2).$$

Příklad 14. Dokažte, že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě.

Násobení vektorů II

Nyní zavedeme druhý způsob, jak násobit vektory. Tentokrát za účelem jednoduše pracovat s rovnoběžností.

Definice. (Vektorový součin) *Máme-li vektory $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, pak číslo*[4] $c = a_1b_2 - a_2b_1$ *nazveme vektorovým součinem vektorů A a B a značíme $A \times B$.*

Vlastnosti vektorového součinu

(i) $A \times B = -B \times A$
(ii) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$, $(tA) \times B = A \times (tB) = t(A \times B)$
(iii) $A \times B = |A| \cdot |B| \cdot \sin\varphi$, kde φ je orientovaný úhel mezi vektory A a B.
(iv) $A \times B = 0 \Leftrightarrow A \parallel B$

Nyní se již můžeme vrhnout i na ty nejtěžší příklady.

Příklad 15. Buď $ABCDE$ pětiúhelník takový, že čtyři z jeho pěti stran jsou rovnoběžné s protější úhlopříčkou. Dokažte, že totéž platí i pro pátou stranu.

Příklad 16. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník. Označme $M_1, M_2, \ldots M_6$ postupně středy stran $AB, BC, \ldots, FA$. Dokažte, že přímky M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 procházejí jedním bodem, právě když trojúhelníky ACE a BDF mají stejný obsah.

Příklad 17. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí, že vzdálenost středů jakýchkoliv protějších stran je rovna $\sqrt{3}/2$ násobku součtu jejich délek. Ukažte, že všechny vnitřní úhly šestiúhelníka jsou shodné.

(IMO 2003 - problem 3)

[4] Možná ses na střední škole učil, že výsledkem vektorového součinu je vektor a teď se divíš. Přísně vzato máš pravdu, nicméně pro nás nebude jeho orientace vůbec zajímavá, takže je pohodlnější s ním pracovat jako s číslem.

Příklad 18. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí $|AD| = |BC| + |EF|$, $|BE| = |CD| + |FA|$, $|CF| = |AB| + |DE|$. Ukažte, že platí

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|FA|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

(Kazachstán 2006 nebo též české výběrko 2007)

Příklad 19. Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník o obvodu P. Označme $N_1, N_2, \ldots, N_6$ postupně středy stran $AB, BC, \ldots, FA$. Šestiúhelník $N_1N_2N_3N_4N_5N_6$ má obvod P'. Má-li $N_1N_2N_3N_4N_5N_6$ shodné všechny vnitřní úhly, ukažte, že platí $P' \leq (\sqrt{3}/2)P$.

(Vietnam 2004)

Literatura

Čerpal jsem převážně z článku *Vectors conquering hexagons* od autorů *Iurie Boreica* a *Liubomira Chiriaca*. Tento a mnoho dalších článků naleznete na stránce `http://reflections.awesomemath.org/`
Dále jsem čerpal z knihy

Arthur Engel, Problem-Solving Strategies, Springer 1998