Sčitovanie

Marek Tesař

Ako matemetikom sa vám už určite neraz stalo, že ste mali spočítať počet nejakých možností a vám sa podarilo nájsť len nejakú sumu, ktorá daný počet vyjadrovala, ale už ste ju nedokázali sčítať. A práve na tejto prednáške si ukážeme nejaké finty pomocou ktorých by sa niektré sumy mohli dať sčítať.

Asi každý z vás vie sčítať sumu $1^0+2^0+3^0+\cdots+n^0$, kde $n \in \mathbb{N}$. Niektorí dokonca vedia vypočítať aj koľko je $1^1+2^1+3^1+\cdots+n^1$ a možno mi nebudete veriť, ale nájdu sa aj ľudia, ktorí vedia vypočítať aj $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$. No a mi si na tejto prednáške ukážeme ako sa dá obecne nájsť vzorec pre výpočet $1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, kde $n, k \in \mathbb{N}$

Definícia. *Výraz $1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, kde $n, k \in \mathbb{N}$ budeme skrátene zapisovat ako $\sum_{i=1}^n i^k$*

Definícia. *Zápisom $n!$ pre $n \in \mathbb{N}$ budeme rozumieť hodnotu $n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$ a budeme jej hovorit n-faktoriál*

Definícia. *Zápisom $\binom{n}{k}$ budeme rozumieť hodnotu $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ a budeme ju čítať ako n nad k*

Číslam $\binom{n}{k}$ sa niekedy hovorí aj kombinačné čísla a oni majú niekoľko zaujímavých vlastností. Mi budeme využívať najmä túto:

Pozorovanie. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Toto pozorovanie si môžete ľahko dokázať z definície kombinačných čísiel. Ukážme si teraz ako sa dá zrátať suma $\sum_{i=1}^n i^2$. Využijeme pri tom známy fakt, že $\sum_{i=1}^n i = \binom{n+1}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Tvrdenie.

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{2}=\binom{n+1}{3}$$

Pričom $\binom{1}{2}$ aj $\binom{2}{3}$ si definujeme ako 0. Úpravou potom dostávame:

$\sum_{i=1}^n \binom{i}{2} = \sum_{i=2}^n \binom{i}{2}+\binom{2}{3} = \sum_{i=3}^n \binom{i}{2}+(\binom{2}{2}+\binom{2}{3}) = \sum_{i=3}^n \binom{i}{2}+\binom{3}{3} = \sum_{i=4}^n \binom{i}{2}+\binom{4}{3} = \cdots = \binom{n}{2}+\binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}$. Ale na druhej strane $\binom{i}{2} = \frac{i\cdot(i-1)}{2} = \frac{i^2}{2}-\frac{i}{2}$. No a keď to všetko dáme do kopy, tak dostávame: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}$.

No a keď si z tohoto vzťahu vyjadríme $\sum_{i=1}^{n} i^2$ a za $\sum_{i=1}^{n} i$ dosadíme $\binom{n+1}{2}$, tak dostávame: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{2\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)+3\cdot(n+1)\cdot n}{6} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Na prednáške si potom ukážeme postup ako by sa obecne dali vyjadriť sumy tvaru $\sum_{i=1}^{n} i^k$. Kombinačné čísla sa ale kombinačné nevolajú len tak náhodou. Majú totiž súvislosť s rôznymi kombinatorickými javmi a tieto javy môžu potom pomôcť pri úprave rôznych súm. O tom svedčia aj náledujúce úlohy.

Úloha. Vyjadrite hodnotu $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$.

Úloha. Vyjadrite hodnotu $\sum_{i=1}^{n} i^2\binom{n}{i}$.

Ďalšou samostatnou kapitolou pri počítaní súm sú teleskopiské sumy. Asi taká najznámejšia z nich je $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)}$. Na to aby sme ju vedeli sčítať si stačí uvedomiť, že $\frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. Potom dostávame $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Úloha. Spočítajte sumu: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)\cdot(i+2)}$

No a na konci si preriešime niekoľko príkladíkov, v ktorých si precvičíme to, čo sme sa naučili ...

Úloha. Dokážte, že $(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2}) > \frac{1}{2}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Úloha. Nech $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ je aritmetická postupnosť s diferenciou $d \in \mathbb{N}$. Spočítajte: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i\cdot a_{i+1}}$.

Úloha. Nech $f_1, f_2, \dots$ je Fibonachiho postupnosť (tj. $f_1 = f_2 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pre $n \geq 3$). Spočítajte $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}\cdot f_{n+1}}$.