Rubikova kostka a grupy

Libor Barto

Přednáška je inspirována velmi pěknou knihou *Matematické hlavolamy*, která vyšla v edici *Škola mladých matematiků (svazek 60).*

Tahy, postupy

Abychom se domluvili, jaké tahy děláme, musíme si nejprve Rubikovu kostku nějak orientovat (správně natočit). Nejlépe podle polohy středních plošek, které se jednotlivými tahy nemění (tvoří kostru kostky). Tak například bílá ploška bude vepředu a červená nahoře.

Definice. *Na kostce máme několik základních tahů: otočení pravé (levé, čelní, zadní, horní, dolní) vrstvy po směru hodinových ručiček (dále kladný směr) – tyto tahy označíme P (L, C, Z, H, D) – a otočení proti směru hodinových ručiček (záporný směr) – tyto tahy označíme P^{-1}, (L^{-1}, …).*

Definice. *Složením tahů vznikne* postup*. Například postup $A = PLZ^{-1}$ značí, že nejprve otočíme pravou vrstvou v kladném směru, potom levou vrstvou v kladném směru a nakonec zadní vrstvou v záporném směru. „Postup“, který nic nedělá, označíme N. Některé postupy jsou „zbytečně složité“, například postup $PLL^{-1}Z$ udělá na kostce zřejmě to samé jako postup PZ.*

Definice. *Postupu, ve kterém nejsou vedle sebe inverzní tahy říkáme* redukovaný postup*. Ke každému postupu nalezneme redukovaný postup tak, že postupně vynecháme všechny dvojice inverzních tahů (které jsou vedle sebe) v libovolném pořadí. Tomuto procesu říkejme* redukce*. Asi nikoho nepřekvapí následující tvrzení.*

Věta. *Redukovaný postup nezávisí na pořadí, ve kterém provádíme redukci.*

Věta. *Ke každému postupu A existuje postup, který označíme A^{-1}, takový, že redukcí postupu AA^{-1} i $A^{-1}A$ vznikne postup N.*

Pozice

Značení. Jednotlivé kostičky Rubikovy kostky budeme označovat stěnami, ve kterých mají správně ležet (malými písmeny, aby se nepletly s tahy) – takže hranové kostičky jsou ch, ph, zh, lh, cd, pd, zd, ld, rohové kostičky jsou lch, pch, pzh, lzh, lcd, pcd, pzd, lzd. Množinu všech kostiček označíme K.

Značení. Pozici na krychli reprezentujeme zobrazením f z množiny K do množiny K. Toto zobrazení přiřadí každé kostičce místo, kde leží. Tedy např. pokud kostička ch leží na místě, kde má být správně kostička zd, tak bude $f(ch) = zd$. Správné pozici je přiřazeno identické zobrazení (zobrazení takové, že $\forall x \in K \quad f(x) = x$). Zobrazení f vystihuje pouze polohu prvků, nikoliv orientaci – tou se budeme zabývat až úplně nakonec.

Věta. *Každé takové f je permutace množiny K (tedy zobrazení které je prosté – žádným dvěma různým prvkům nepřiřadí stejný – a na – ke každému prvku existuje prvek, který se na něj zobrazí).*

Značení. Permutacemi budeme též reprezentovat výsledek určitého postupu. Postupu A přiřadíme permutaci a. Bude to reprezentace pozice, kterou dostaneme ze správné pozice postupem A.

Definice. *Máme-li dva postupy A, B, tak složený postup AB je reprezentován složenou permutací ab, která prvku x přiřadí $b(a(x))$.*

Definice. *Inverzní postup A^{-1} je reprezentován inverzní permutací a^{-1} – je to inverzní funkce k a.*

Složit kostku z pozice f nyní znamená najít postup A, pro který $fa = n$, kde n je reprezentace postupu N, tedy identická permutace.

Na přednášce si ukážeme, jak se dají permutace zapisovat a kreslit a jak se na obrázku permutace skládají a invertují.

Sudé a liché permutace

Definice. *Nejjednušími permutacemi jsou transpozice, tj. permutace, které pouze prohazují dva prvky (tj. takové, že $f(a) = b, f(b) = a$ pro nějaké různé prvky a, b a $f(x) = x$ jinak).*

Věta. *Každá permutace f je složením transpozic. Toto složení není jednoznačné, ale počet transpozic má pro každé takové složení stejnou paritu.*

Definice. *Je-li počet transpozic, na něž rozložíme permutaci f, sudý, říkáme, že permutace f je sudá, jinak říkáme, že permutace f je lichá.*

Věta. *Inverzní permutace k sudé (resp. liché) permutaci je sudá (resp. lichá). Složením dvou permutací stejné parity vznikne permutace sudá. Složením dvou permutací opačné parity je permutace lichá.*

Na přednášce se dozvíme jak snadno určit paritu permutace pomocí obrázku. Ukážeme, že každý tah na Rubikově kostce je reprezentován sudou permutací. Z toho např. plyne, že pokud je permutace určená pozicí lichá, pak je tato pozice neřešitelná. Ostatní pozice již řešitelné jsou (co se týká polohy prvků, ne orientace!).

Definice. *Dalšími jednoduchými permutacemi jsou trojcykly (tj. permutace takové, že $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ pro nějaké různé prvky a, b, c a $f(x) = x$ pro prvky ostatní).*

Věta. *Každá sudá permutace je složením trojcyklů.*

Abychom dostali na Rubikově kostce všechny kostičky na správná místa, stačí nám umět najít postupy, které dělají na kostce trojcykly (zde je malý podvod, odhalíte jej?).

Jak udělat na Rubikově kostce trojcyklus

Není těžké najít postup A, který vymění v horní vrstvě dvě sousední hranové kostičky a ostatní kostičky v horní vrstvě nechá na původních místech. Po postupu A otočíme horní vrstvou například v kladném směru a uděláme postup A^{-1}. Aplikace inverzního postupu zapříčiní, že se všechny kostičky mimo horní vrstvu vrátí na svá původní místa. V horní vrstvě bude výsledkem trojcyklus (po otočení horní vrstvou v záporném směru).

Libovolný jiný hranový trojcyklus uděláme tak, že najdeme libovolný postup B, který dané tři kostičky přesune na místa kostiček, se kterými již trojcyklus dokážeme udělat postupem $AHA^{-1}H^{-1}$. Náš trojcyklus potom uděláme postupem $BAHA^{-1}H^{-1}B^{-1}$. Proč tomu tak je, si řekneme na přednášce.

Stejné metody vedou k nalezení rohových trojcyklů a postupů, které mění pouze orientace prvků.

Grupy

Zatím jsem se vůbec nezmínil o pojmu v nadpisu článku. Grupa a pojmy teorie grup jsou za veškerými úvahami, které jsme doposud prováděli. Je to jeden z nejzákladnějších pojmů současné algebry. Pomocí teorie grup se dokazuje známý fakt o nemožnosti nalézt vzorec pro řešení rovnic pátého stupně, řeší se starověké problémy jako trisekce úhlu, kvadratura kruhu, zdvojení krychle, využívá se v šifrování dat, …