Rozklady

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Aditivní teorie čísel, do níž se řadí rozklady, je oblast matematiky na hranici teorie čísel a kombinatoriky. Příspěvek se zabývá otázkou, kolika způsoby lze přirozené číslo rozložit na součet několika přirozených čísel. Rozebírá různé typy rozkladů – na různé části, na liché části, na části, které nepřesahují dané číslo, apod. Ve druhé části příspěvku se objeví vytvořující funkce a jak se dají využít při dokazování různých identit o rozkladech.

Rozklady patří do netradiční části teorie čísel, kde místo s násobením budeme pracovat se sčítáním. Nejprve se seznámíme s tím, co to jsou kompozice, rozklady a jejich různé typy. Seznámíme se s Ferrerovými diagramy, které představují jednoduchý, ale užitečný nástroj, jak si rozklady reprezentovat. Pentagonální věta zase přináší užitečné poznatky o počtu rozkladů. Ve druhé části si ukážeme základní metody pro práci s vytvořujícími funkcemi, a to nám umožní snadno vyřešit velké množství identit. Ke konci se opět vrátíme ke kombinatorickému přístupu a dokážeme Cohen–Remmelovu větu.

Pro začátek několik základních pojmů.

Definice. Mějme přirozené číslo n.

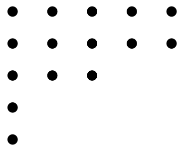
(i) *Kompozice* čísla n jsou výrazy $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$, kde $a_1, \ldots, a_r$ jsou přirozená čísla. Jejich počet značíme $c(n)$.

(ii) Nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$ jsou přirozená čísla. Pak $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ nazýváme *rozklad* a čísla λ_i jeho *části*. Pokud $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n$, tak λ je rozklad čísla n. Často také píšeme $\lambda = (\lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2}, \ldots, \lambda_r^{f_r})$, kde exponent udává, kolikrát se v rozkladu daná část vyskytuje.

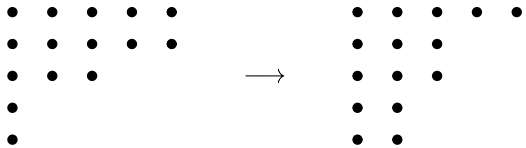
(iii) Označme $\mathcal{P}$ množinu všech rozkladů a $\mathcal{P}_n$ množinu všech rozkladů čísla n. Jejich počet značíme $p(n) = |\mathcal{P}_n|$.

Cvičení 1. Určete počet kompozic $c(n)$ a počet kompozic s právě k částmi $c(n, k)$.

Ferrerův diagram je vizualiazace rozkladu pomocí teček tak, že každý řádek obsahuje tolik teček jako jedna část rozkladu. Například $\lambda = (5^2, 3, 1^2)$ má Ferrerův diagram:



Definice. *Kamarádský rozklad* γ' je rozklad, který vznikne z rozkladu γ otočením Ferrerova diagramu podle diagonály. Například $\lambda = (5^2, 3, 1^2)$ má kamarádský rozklad $\lambda' = (5, 3^2, 2^2)$:



Cvičení 2. Počet rozkladů s maximálně k částmi je stejný jako počet rozkladů na části nepřesahující číslo k.

Cvičení 3. Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n je roven počtu rozkladů čísla $2n$ na n částí.

Cvičení 4. Rozklad nazveme symetrický, pokud je sám svým kamarádským rozkladem. Uvědomte si, že symetrických rozkladů čísla n je stejně jako těch rozkladů čísla n, kde jsou jednotlivé části různé a současně liché.

Cvičení 5. Počet rozkladů čísla n, kde se mohou opakovat pouze části, které nejsou dělitelné 2^m, je stejný jako počet rozkladů čísla n, kde se každá část vyskytuje maximálně $\left(2^{m+1} - 1\right)$-krát.

Cvičení 6. Počet rozkladů čísla n na po sobě jdoucí části (například $9 = 2+3+4 = 4+5 = 9$) je stejný jako počet lichých dělitelů čísla n.

Cvičení 7. Počet rozkladů čísla n s různými částmi je stejný jako počet rozkladů čísla n s lichými částmi.

Cvičení 8. Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n, které neobsahují druhou mocninu přirozeného čísla, je stejný jako počet rozkladů čísla n, ve kterých se každé číslo i vyskytuje nanejvýš $(i-1)$-krát.

Definice. *Pentagonální čísla* jsou čísla, která se dají zapsat ve tvaru $\frac{3m^2+m}{2}$ pro celé nenulové číslo m. Tedy jsou to postupně čísla (pro $m = -1, 1, \ldots$):

$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, \ldots$$

Věta. (Pentagonální) *Nechť $\omega(m) = (3m^2+m)/2$. Pak platí následující tři tvrzení:*

$$(1)\quad \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(x^{\omega(m)} + x^{\omega(-m)}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\omega(m)}.$$

(2) *Nepentagonální číslo n má stejný počet rozkladů na sudý počet různých částí jako na lichý počet různých částí. Pro pentagonální číslo $n = \omega(\pm m)$ je rozdíl počtu rozkladů na sudý počet různých částí a počtu rozkladů na lichý počet různých částí rovný $(-1)^m$.*

(3) *Pro přirozené číslo n platí rekurence*

$$\begin{aligned} p(n) = & p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \\ & + p(n-12) + p(n-15) - \cdots , \end{aligned}$$

kde dodefinujeme $p(m) = 0$ pro $m < 0$ a $p(0) = 1$.

Definice. (Vytvořující funkce) Nechť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost přirozených čísel. Potom mocninná řada

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

kde $x \in \mathbb{C}$, se nazývá vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Tvrzení. *Nechť A je podmnožina přirozených čísel. Označme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_A(n) x^n \qquad \text{a} \qquad f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{A,k}(n) x^n,$$

kde $p_A(n)$ a $p_{A,k}(n)$ je postupně počet rozkladů čísla n na části z A a počet rozkladů čísla n na části z A, z nichž žádná se nevyskytuje více než k-krát. Pak

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - x^a}, \\ f_k(x) &= \prod_{a \in A} (1 + x^a + \cdots + x^{ka}) = \prod_{a \in A} \frac{1 - x^{(k+1)a}}{1 - x^a}. \end{aligned}$$

Cvičení 9. Dokažte si cvičení 7, 8, 5a případně 2 pomocí vytvořujících funkcí.

Věta. (Sylvester) *Označme $A_k(n)$ počet rozkladů čísla n na liché části tak, že různých částí je právě k. Dále $B_k(n)$ označme počet rozkladů čísla n skládajících se z k úseků po sobě jdoucích částí. Pak $A_k(n) = B_k(n)$ pro každé k, n.*

Cvičení 10. Uvědomte si, že speciální případ této věty je cvičení číslo 6.

Věta. (Princip inkluze a exkluze) *Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_k$ jsou konečné množiny a všechny jsou podmnožinami množiny X. Pak platí*

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} X_i \right| = |X| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} X_i \right|.$$

Věta. (Cohen, Remmel) *Nechť* $\Lambda = \{\lambda^1, \lambda^2, \dots\}$ a $\Gamma = \{\gamma^1, \gamma^2, \dots\}$ *jsou (nekonečné) posloupnosti rozkladů takové, že pro každou konečnou podmnožinu* I *přirozených čísel platí*

$$\left|\bigcup_{i\in I} \lambda^i\right| = \left|\bigcup_{i\in I} \gamma^i\right|.$$

Pak pro každé přirozené číslo n *je počet rozkladů čísla* n *neobsahujících žádný rozklad z* Λ *stejný jako počet rozkladů čísla* n *neobsahujících žádný rozklad z* Γ.

Důsledek. (Glaisherova identita) *Počet rozkladů čísla* n *neobsahujících žádnou část, která je násobkem* d, *je stejný jako počet rozkladů čísla* n, *kde je každá část nejvýše* $(d-1)$*-krát.*

Důsledek. (Schurova identita) *Počet rozkladů čísla* n, *jejichž části dávají zbytky 1 a 5 po dělení šesti, je stejný jako počet rozkladů čísla* n *na různé části nedělitelné třemi.*

Návody

2. Navzájem popárujte kamarádské rozklady.

3. V rozkladu délky n snižte každý sčítanec o jedna.

4. Spojte tečky z i-tého řádku a i-tého sloupce symetrického rozkladu do jedné části nového rozkladu.

5. Opakovaně spojujte 2^{m+1} stejných částí ve dvě 2^m-krát větší části.

6. Dokažte, že počet rozkladů na lichý počet po sobě jdoucích částí je stejný jako počet lichých dělitelů čísla n menších než $\sqrt{2n}$.

7. Popárujte rozklady. Například $1+4+3+6 = 1+1+1+1+1+3+3+3$.

8. Nahrazujte v prvním typu rozkladů vždy k stejných čísel k za číslo k^2.

Literatura a zdroje

[1] Klazar, M.; *Introduction to Number Theory (lecture notes)*, 2006, *http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_utc.pdf*

[2] Hančl, J.; *Obecná enumerace číselných rozkladů*, 2011

[3] Andrews, G. E.; *The theory of partitions*, Cambridge University Press, 1998 (reprint originálu 1976)

[4] Mirek Olšák; *Kombinatorické (ne)počítání*, Sborník iKS, 2013, *http://iksko.org/files/sbornik2.pdf*

[5] Hirschhorn, M. D. a Hirschhorn, P. M.; *Partitions into Consecutive Parts*, Mathematics Magazine, 2003, Volume 76, Number 4, strany 306-308, *http://www.maa.org/sites/default/files/3004420056860.pdf.bannered.pdf*

[6] Bui, L.; *New Results in Partition Theory*, 1997