Rozklady na součin

Martina Vaváčková

Abstrakt. Příspěvek ukazuje základní techniky rozkladu výrazu na součin. Seznamuje čtenáře s několika známými užitečnými rozklady a ilustruje jejich použití na konkrétních úlohách.

Rozkládání výrazů na součin je dovednost, která má v úlohách z matematické olympiády široké uplatnění. Často potřebujeme najít kořeny nějakého polynomu, spočítat hodnotu výrazu na základě znalosti hodnoty jiného výrazu či jen říct, že zadaný výraz je něčím dělitelný. Při tom všem se hodí ovládat úpravu výrazů ze součtového tvaru na tvar součinový.

Základní metody rozkladu na součin

Při rozkládání na součin používáme známé vzorce, případně zjišťujeme symetrii výrazu (roznásobením se zachová) a počty členů různých stupňů, což nám pomůže rozklad „uhodnout“.

Tvrzení. *Pro libovolná reálná čísla a, b, x, p, q a přirozené číslo n $(n > 1)$ platí:*

(i) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
(ii) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,
(iii) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\big(a^2 \mp ab + b^2\big)$,
(iv) $a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}\big)$,
(v) $a^n + b^n = (a+b)\big(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}\big)$, *$n$ liché,*
(vi) $x^2 - (p+q)x + pq = (x-p)(x-q)$.

Tvrzení. *Buď $f(x)$ reálný polynom, $a \in \mathbb{R}$ jeho kořen. Pak výraz $x - a$ dělí $f(x)$.*

Cvičení. Následující výrazy rozložte na součin:

(a) $x^2 - 6x + 9$, $x^2 - x - 2$,
(b) $4x^2 - 4x + 1$, $6x^2 + x - 1$,
(c) $x^2 + ax - x - a$, $xy - 2x + y - 2$,
(d) $x^8 - y^8$, $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$,
(e) $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$,

Klíčová slova. algebra, rozklady, součin, dělitelnost, Vietovy vztahy

(f) $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$,
(g) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$,
(h) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc$,
(i) $x^4 + x^2 + 1$,
(j) $x^4 + y^4 + x^2y^2$.

Příklad 1. Ukažte, že platí-li pro délky a, b, c stran trojúhelníka rovnost

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0,$$

pak je tento trojúhelník rovnoramenný.

Příklad 2. V oboru celých čísel vyřešte rovnici $2(x+y) + xy = x^2 + y^2$.

Příklad 3. Najděte dvě čtyřmístná čísla, jejichž součinem je $4^8 + 6^8 + 9^8$.

Příklad 4. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + x^2y + y^2x &= n \\ x^2 + y^2 + x + y &= n + 1 \end{aligned}$$

pouze celočíselná řešení.

Dvě užitečné identity

Tvrzení. *Pro libovolná reálná čísla a, b, c platí*

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\big(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\big).$$

Je-li $a + b + c = 0$, pak $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Tvrzení. *Pro libovolná reálná čísla x, y platí*

$$x^4 + 4y^4 = \big(x^2 + 2xy + 2y^2\big)\big(x^2 - 2xy + 2y^2\big).$$

Příklad 1. Výraz $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ rozložte na součin.

Příklad 2. Vypočítejte:

$$\frac{2010^3 - 1006^3 - 1004^3}{2010 \cdot 1006 \cdot 1004}.$$

Příklad 3. Nechť a, b, c jsou navzájem různá reálná čísla. Pak

$$\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0.$$

Dokažte.

Příklad 4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel a takových, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není $n^4 + a$ prvočíslo.

Příklad 5. Celá čísla x, y, z splňují vztah

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = xyz.$$

Dokažte, že výraz $x^3 + y^3 + z^3$ je dělitelný $x + y + z + 6$.

Příklad 6. Dokažte, že číslo $n^4 + 4^n$, $n \in \mathbb{N}$, je prvočíslo právě tehdy, když $n = 1$.

Příklad 7. Dokažte, že $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ je racionální číslo.

Příklad 8. Nechť p, q, r jsou nenulová racionální čísla taková, že $\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$ je rovněž nenulové racionální číslo. Dokažte, že

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

je racionální číslo. (CentroAmerican 2010)

Literatura a zdroje

[1] Titu Andreescu, Bogdan Enescu: *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, Boston, 2006

[2] Titu Andreescu, Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston, 2009

[3] Michal Rolínek, Josef Tkadlec: Seminář *Umění vidět v matematice*