Rovinné grafy

Robert Šámal

Co jsou zač?

Pojďme si kreslit grafy! Grafy obvykle znázorňujeme obrázkem, my se teď budeme zabývat grafy, které jdou znázornit „pěkně“: *Rovinný graf* je takový graf, který lze nakreslit na papír (tj. na rovinu) bez křížení hran. V tomto nakreslení jsou vrcholy body v rovině, hrany (spojité) křivky mezi příslušnými body, dva oblouky mají společný leda koncový bod, společný vrchol odpovídajících hran. (Matematicky přesnou definici najdete ve třetí části tohoto pojednání.)

Rovinné grafy nejsou jen samoúčelná hříčka. Mnohé grafy, které nacházíme v normálním světě, jsou rovinné — silnice v městě (bez nadjezdů), plošné spoje, mapa států, konvexní mnohostěny. Navíc tyto grafy mají mnoho zajímavých vlastností.

První otázka, kterou se budeme zabývat je, jak poznat, jestli je nějaký graf rovinný (praktická aplikace: jde vyrobit takovýhle integrovaný obvod?). Pokud graf rovinný je, obvykle brzy najdeme nějaké jeho rovinné nakreslení a jsme hotovi. Pokud však rovinný není, musíme to nějak dokázat. Nejsnáze to jde pomocí následující věty (dělením nějakého grafu myslíme graf, který vznikne přidáváním vrcholů na některé hrany).

Věta. (Kuratowského charakterizace rovinných grafů) *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Tato věta nám dává nástroj, jak „ručně“ prokázat nerovinnost libovolného (nerovinného) grafu. Pokud však chceme zkoumat velké grafy, použijeme patrně počítač, a pak Kuratowského věta není příliš praktická, vede totiž k pomalému algoritmu. Pro tyto účely byly vyvinuty rychlé (ale komplikované) algoritmy, nejrychlejší rozhodnou o rovinnosti grafu s n vrcholy v čase $O(n)$ (tj. nejvýše v čase $c.n$, pro nějaké pevné c). (Zamyslete se, jestli je to vůbec možné, vždyť jenom na načtení všech hran potřebujeme až $\binom{n}{2} \sim n^2/2$ operací!)

Eulerův vzorec

Nejprve si musíme říci, co je to stěna, přesněji co je to stěna nějakého nakreslení rovinného grafu (rozmyslete si, že nemá smysl mluvit o stěně grafu, který není nakreslen). Neformálně řečeno, vezmeme nůžky a rovinu rozstříháme podle oblouků znázorňujících jednotlivé hrany. Rovina se rozpadne na několik částí (eventuálně na jednu část …), každou z nich nazveme stěnou. (Formálně bychom mluvili o komponentách souvislosti …) Rozmyslete si souvislost se stěnou mnohostěnu. Následující věta nám umožňuje zjistit, kolik stěn má nakreslení nějakého (rovinného) grafu (mj. nám říká, že všechna nakreslení mají stěn stejně).

Věta. (Eulerův vzorec) *Mějme souvislý graf s e hranami a v vrcholy ($v > 0$) nakreslený na rovinu tak, že má s stěn. Pak platí*

$$v - e + s = 2\,.$$

Eulerův vzorec je poměrně jednoduchý, nicméně stojí v jádru důkazů většiny tvrzení o rovinných grafech. Uveďme si několik jednoduchých důsledků:

(1) Pro každý rovinný graf platí $e \le 3v - 6$ a $s \le 2v - 4$.
(2) Pro každý rovinný graf bez trojúhelníků platí $e \le 2v - 4$ a $s \le v - 2$.
(3) Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše pět.
(4) Každý rovinný graf lze obarvit pěti barvami.

Rovinných grafů se týka slavný problém, tzv. *Problém čtyř barev*. Máme za úkol vyrobit politickou mapu světa. Dostaneme obrysovou mapu jednotlivých států (každý stát je souvislá oblast) a máme za úkol ji vybarvit tak, aby se sousední státy nepletly — tj. aby byly vybarveny různými barvami. Snadno se ukáže, že tři barvy nestačí, poměrně lehké je též ukázat, že pět vždycky stačí. Otázka, zda vždy stačí čtyři barvy zůstávala nezodpovězena skoro sto let. Až v roce 1976 ji pánové Appel a Haken vyřešili (odpověd zní: ano, čtyři barvy stačí); důkaz je velmi obtížný, jeho podstatná část spočívá v probírání mnoha možností počítačem. Lze tedy říci, že uspokojivý důkaz dosud nebyl nalezen.

Poznamenejme ještě, že se můžeme zabývat i kreslením grafů na sféru, válec, anuloid, Möbiův list, či jakoukoliv jinou plochu. Pro každou pevně zvolenou plochu platí analogie Eulerova vzorce (místo dvojky bude na pravé straně nějaká jiná konstanta), můžeme zkoumat analogii Problému čtyř barev (kupodivu jsou tyto analogie snáze řešitelné, rovina je nejtěžší případ) a hledat kritérium podobné Kuratowského větě (komplikované věty z teorie grafů nám říkají, že takové kritérium existuje pro každou plochu).

Formální definice

Definice. (oblouk, kružnice) *Oblouk je taková množina o bodů v rovině, že existuje prosté spojité zobrazení $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$, pro které je o obor hodnot. Body $f(0)$ a $f(1)$ nazveme koncovými body oblouku o.*

Topologická kružnice se od oblouku liší jen tím, že požadované zobrazení f musí splňovat podmínku $f(0) = f(1)$ (a jinak je prosté).

K tomu dodejme jen to, že definice je vlastně přirozená, funkce f nám popisuje, jak oblouk/kružnici kreslíme, v čase t kreslíme bod $f(t)$.

Definice. (rovinné grafy) *Nakreslení grafu na rovinu je zobrazení, které každému vrcholu v grafu přiřazuje bod $b(v)$ roviny (každému vrcholu jiný) a každé hraně $e = \{u, v\}$ přiřazuje oblouk $o(e)$ s koncovými body $b(u)$ a $b(v)$.*

Nakreslení je rovinné *pokud $o(e) \cap o(f) = b(e \cap f)$ (pro všechny hrany e, f našeho grafu). Neboli hranám, které mají jeden společný vrchol v, jsou přiřazeny oblouky, které mají společný bod $b(v)$, hranám, které nemají společný vrchol jsou přiřazeny disjunktní oblouky.*

Graf nazveme rovinný*, pokud existuje nějaké jeho rovinné nakreslení.*

Uff. Poznamenejme, že bychom mohli pro kreslení hran povolit jen „lomenice“, tj. oblouky složené z konečně mnoha lomených čar. (Kdo ví něco málo z analýzy, může zkusit dokázat, že tím definici nezměníme, že každý rovinný graf (podle výše uvedené definice) je i „lomenicově rovinný“.) To asi není příliš překvapivé, ale hodně si tím pomůžeme, neboť zacházení s oblouky není snadné, např. důkaz následující Jordanovy věty je hodně obtížný, zatímco její variantu pro lomenice můžete zkusit dokázat jako (trochu těžší) cvičení. Poznamenejme ještě, že bychom se (kupodivu) mohli při kreslení hran omezit jen na úsečky!

Jordanova věta je klíčem k důkazu nerovinosti grafů, nemůžeme bez ní např. pořádně dokázat, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné. Pokud vám připadá triviální, tak to bude asi tím, že si příliš jednoduše představujete topologické kružnice a vůbec spojité křivky.

Věta. (Jordanova věta o kružnici) *Každá topologická kružnice rozděluje rovinu na dvě souvislé oblasti. (Podmnožinu M roviny nazveme souvislou, pokud každé její dva body jdou spojit obloukem, který celý leží v množině M.)*