Řetězové zlomky

Pavel Podbrdský

Úvod

Na této přednášce se budeme zabývat vyjádřením reálných čísel ve tvaru tzv. řetězových zlomků, tj. výraz

$$(\heartsuit)\ a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

$$a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{N}.$$

Tento zlomek může mít konečný, nebo nekonečný počet členů. Pokud je řetězový zlomek konečný, je jeho hodnota výsledkem konečného počtu racionálních úkonů nad čísly $a_0,\ a_1, \dots,\ a_n$. V takovém případě je intuitivně jasné, co míníme hodnotou tohoto řetězového zlomku. Cílem přednášky bude pojem řetězového zlomku přesněji zavést i pro případ nekonečného zlomku, studovat jeho vlastnosti a ukázat jeho jednoduché aplikace[1].

Zavedení pojmů a značení

Zprvu budeme řetězový zlomek ($\heartsuit$) chápat jako funkci v proměnných $a_0 \in \mathbb{R}$ a $a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{R}^+$.

Pro zkrácení budeme výraz ($\heartsuit$) zapisovat, jako

$$(\clubsuit)\ [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots],$$

resp.

$$(\clubsuit)\ [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n],$$

půjde-li o nekonečný, resp. konečný řetězový zlomek.

Definice. *Úsekem řádu k řetězového zlomku ($\clubsuit$) budeme rozumět*

$$s_k = [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_k].$$

[1] Jde zejména o aproximace reálných čísel zlomky. Pokud zbude čas, taky bych chtěl na přednášce předvést, jak se z řetězových zlomků dají zkonstruovat konkrétní transcendentní čísla.

Zbytkem řádu k řetězového zlomku (♣) budeme rozumět

$$r_k = [a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \dots].$$

Pozorování. Pro konečné řetězové zlomky a $1 \le k \le n$ platí

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n] = [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_{k-1},\ r_k].$$

Sblížené zlomky

Věta. *Existují polynomy $P_n,\ Q_n$ o $n+1$ proměnných s celočíselnými koeficienty, takové, že pro každé $a_0 \in \mathbb{R},\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n] = \frac{P(a_0, a_1, \dots,\ a_n)}{Q(a_0, a_1, \dots,\ a_n)}.$$

Definice. *Sblíženým zlomkem řádu k řetězového zlomku (♣) budeme rozumět zlomek $\frac{p_k}{q_k}$, kde $p_k = P_k(a_0, a_1, \dots,\ a_k)$ a $q_k = Q(a_0, a_1, \dots,\ a_k)$ a $P_k,\ Q_k$ jsou polynomy z předchozí věty, které již nelze zkrátit.*

Věta. *Pro čitatele a jmenovatele sblížených zlomků platí rekurence*

$$p_0 = a_0,\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2},\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

pro $k \ge 2$.

Poznámka. Někdy se nám bude hodit definovat také $p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0$, rekurence z předchozí věty pak platí i pro $k = 1$.

Pozorování. Z rekuernce pro q_k a ze skutečnosti $a_k > 0$ pro $k > 0$ plyne, že všechny členy posloupnosti q_k jsou kladné.

Věta. *Pro $k \ge 0$ platí*

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k.$$

Důsledek.

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}.$$

Věta. *Pro $k \geq 1$ platí*

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

Důsledek.

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Pozorování. Díky předchozím větám si můžeme utvořit představu o rozložení hodnot sblížených zlomků. Sblížené zlomky sudého řádu tvoří rostoucí posloupnost a sblížené zlomky lichého řádu tvoří klesající posloupnost, přitom libovolný sblížený zlomek sudého řádu je menší, než libovolný zlomek lichého řádu.

Věta. *Pro každé $1 \leq k \leq n$ platí*

$$[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}.$$

Věta.

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k;\ a_{k-1},\ a_{k-2}, \dots,\ a_1].$$

Nekonečné řetězové zlomky

Máme-li nekonečný řetězový zlomek, již jsme nadefinovali nekonečnou posloupnost jeho sblížených zlomků

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots$$

Nabízí se následující přirozená definice:

Definice. *V případě, že posloupnost sblížených zlomků nekonečného řetězového zlomku má limitu $\alpha \in \mathbb{R}$, řekneme, že tento řetězový zlomek konverguje a má hodnotu α. V takovém případě budeme psát*

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots].$$

V opačném případě řekneme, že daný řetězový zlomek diverguje.

Věta. *Konverguje-li nekonečný řetězový zlomek, konverguje také každý jeho zbytek. Naopak konverguje-li alespoň jeden z jeho zbytků, konverguje taky celý řetězový zlomek.*

Věta. *Hodnota α nekonečného řetězového zlomku vyhovuje pro každé k nerovnosti*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Řetězové zlomky s přirozenými prvky

Dále se již výhradně budeme zabývat řetězovými zlomky, pro které platí $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{N}$.

Věta. *Je-li $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $a_1,\ a_2, \dots \in \mathbb{N}$, pak řetězový zlomek $[a_0;\ a_1,\ a_2, \dots]$ konverguje.*

Pozorování. Sblížené zlomky jsou v základním tvaru (nelze je zkrátit).

Definice. *Zlomky vsunutými mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ (pro $k \geq 1$) budeme rozumět posloupnost zlomků*

$$\frac{p_{k-1} + p_{k-2}}{q_{k-1} + q_{k-2}},\ \frac{2p_{k-1} + p_{k-2}}{2q_{k-1} + q_{k-2}}, \dots,\ \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}.$$

Zobrazení čísel řetězovými zlomky

Dále ze svých úvah vyloučíme konečné řetězové zlomky, jejichž poslední prvek má hodnotu 1.

Věta. *Ke každému reálnému α existuje právě jeden řetězový zlomek, který má hodnotu α. Tento řetězový zlomek je konečný právě tehdy, když α je racionální číslo.*

Sblížené zlomky, jako nejlepší přiblížení

Definice. *Zlomek* $\frac{a}{b}$, $b > 0$ *nazveme nejlepším přiblížením prvního druhu k* $\alpha \in \mathbb{R}$, *leží-li každý zlomek s týmž nebo menším jmenovatelem ve větší vzdálenosti od* α, *než zlomek* $\frac{a}{b}$, *neboli: Platí-li nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$$

pro nějaký zlomek $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, *pak již nutně* $d > b$.

Věta. *Každé nejlepší přiblížení prvního druhu k* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je jedním ze sblížených nebo vsunutých zlomků* α.

Definice. *Zlomek* $\frac{a}{b}$, $b > 0$ *nazveme nejlepším přiblížením druhého druhu k* α, *pokud je splněno: Platí-li nerovnost*

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a|$$

pro nějaký zlomek $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, *pak již nutně* $d > b$.

Věta. *Každé nejlepší přiblížení druhého druhu k* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je nějaký sblížený zlomek* α. *Naopak není-li* $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, *pak je každý sblížený zlomek* α *nejlepším přiblížením druhého druhu k* α.

Poznámka. Existuje ještě spousta dalších zajímavých a užitečných vět o řetězových zlomcích, které bych sem mohl napsat. Jelikož by se délka mého příspěvku stala naprosto neúnosnou a jelikož asi většinu z nich na přednáškách nestihneme ani zmínit, nebudu je zde všechny vypisovat.

Literatura. Vše, co budeme na přednáškách dělat a spoustu dalších věcí najdete v knížečce A. J. Chinčin, *Řetězové zlomky*, Přírodovědecké vydavatelství Praha, 1952