Řetězové zlomky

Dominik Mokriš

Úvod

Podíváme se na zoubek některým základním vlastnostem řetězových zlomků a zjistíme, zda jsme schopni je k něčemu využít. Záměrně ve sborníčku vynechávám některé detaily, takže není žádný problém, pokud tomu nerozumíš na první čtení. Někde neuvádím důkazy – buď je stihneme udělat na přednášce nebo se odkážeme na literaturu.

Základní vlastnosti

Nechť $a_0 \in \mathbb{Z}, a_j \in \mathbb{N}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Výraz ve tvaru

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$$

nazveme řetězový zlomek řádu n a abychom si ušetřili práci, budeme ho zapisovat jako $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Samozřejmě bychom mohli teorii budovat i kdybychom za a_j dosazovali nenulová reálná čísla. Výraz $[a_0; a_1, \ldots]$ nazveme nekonečný řetězový zlomek a budeme jím rozumět posloupnost řetězových zlomků řádu n.

Položme $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ a dále postupujme indukcí:

$$p_n := a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_n := a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Dostáváme

Lemma. *Pro každé $n \geq 0$ a jakákoli kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots$ máme*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Důkaz. Povedeme indukcí

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1 + 0} = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$\begin{aligned}
[a_0; a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] &= [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1/a_{n+1}] \\
&= \frac{(a_n + 1/a_{n+1})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/a_{n+1})q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_m + q_{n-1}} \\
&= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Lemma. *Pro každé $n \geq 0$ máme $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$.*

Důkaz. Použijeme definující vztahy a budeme sledovat, k čemu dojdeme (algebraický postup ;)).

$$\begin{aligned}
p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n &= p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) - q_{n-1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) \\
&= -(p_{n-2}q_{n-1} - q_{n-2}p_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^n (p_{-1}q_0 - q_{-1}p_0) \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

Důsledek. *Pokud $a_j \in \mathbb{N}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$, potom kladná celá čísla p_n a q_n nemají žádného společného dělitele většího, nežli 1.*

Důsledek. *Pro každé $n \geq 1$ platí*

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}.$$

Jak získáme řetězový zlomek zadaného reálného čísla a? Zde je jedna možnost:

Položme $g_1 = [a]$ (dolní celá část a, tj. a zaokrouhlené dolů), $a_1 = 1/\{a\}$ ($\{a\}$ značí zlomkovou část a, tj. $\{a\} = a - [a]$). Pak $a = q_1 + 1/a$ a odtud $a_1 = 1/(a - q_1)$. Pro a_1 celý postup zopakujeme atd. Tedy

$$q_2 = [a_1] = \left[\frac{1}{a - q_1} \right], \quad a_2 = \frac{1}{\{a_1\}}.$$

Pak platí $a_1 = q_2 + 1/a_2$. Takto můžeme postupovat buď dokud q_j nebude celé číslo pro nějaké j v případě racionálního a nebo dokud nás to bude bavit/budeme to

potřebovat v případě iracionálního a. Celé to je modifikace Euklidova algoritmu. Napadá Tě lepší postup?

Věta. *Pro každé kladné racionální číslo tvaru p/q platí*

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \cdots < \frac{p}{q} < \cdots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}$$

a dokonce platí, že každý sblížený zlomek je blíže p/q, než ten předchozí, čili

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|.$$

Jak porovnávat řetězové zlomky? Řekněme si to raději slovy. Dejme tomu, že porovnávám $a = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ a $b = [b_0; b_1, \ldots, b_n]$. Porovnávám nejprve a_1 s b_1, atd. dokud nenajdu dvojici, která se liší, řekněme $a_j > b_j$. Pokud j je liché, pak $a > b$, pokud je j sudé, je $a < b$. V případě, že by třeba b bylo nekonečné, ale na prvních n členech by se nelišilo od a, by opět záleželo na paritě. Pro n sudé $a > b$, pro n liché $a < b$. V případě, že by byly konečné oba, buď existuje člen, ve kterém se liší nebo jsou úplně stejné a tím pádem je stejná i jejich hodnota. A doufám, že jsem na žádnou možnost nezapomněl. ;)

Věta. (Lagrange) *Každou kvadratickou iracionalitu, tj. výraz ve tvaru*

$$\frac{P \pm \sqrt{N}}{Q}; \quad P, Q \in \mathbb{Z}; \quad N \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{N} \notin \mathbb{Q},$$

lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem (tj. takovým, kde se jednotlivé členy pravidelně opakují) a naopak hodnota každého periodického zlomku je kvadratická iracionalita.

Nemám vůbec odhad, jak budeme rychlí a kolik toho stihneme. K řetězovým zlomkům je toho spousta zajímavého, co povídat. Rád bych se ještě podíval na to, jak se pomocí řetězových zlomků řeši rovnice $ax + by + c = 0$ v celých číslech, ale to je na dlouhé povídání.

Literatura

[1] A. J. Chinčin, *Řetězové zlomky,* Přírodovědné nakladatelství Praha 1952

[2] P. Vít, *Řetězové zlomky,* Edice škola mladých matematiků, Mladá Fronta, Praha 1982

[3] M. Klazar, *Introduction to number theory*, je k disposici na `http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_utc.pdf`, tady však pozor, jsou to poznámky k vysokoškolské přednášce, nemá cenu to uspěchat a snažit se to louskat teďka, máte mnohem lepší si počkat a třeba na ni časem chodit.