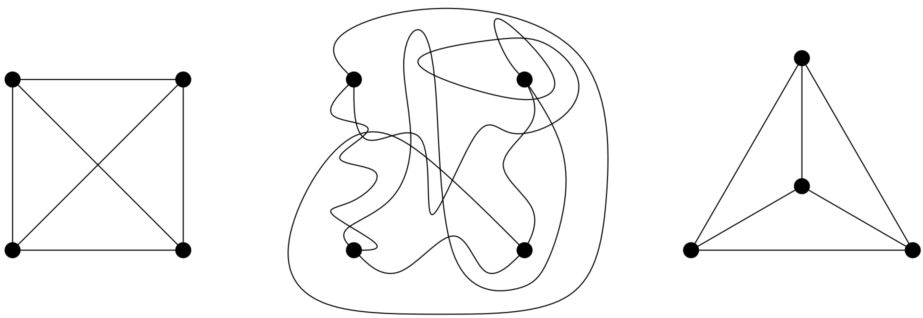
Zajímavé reprezentace rovinných grafů

Jan Kratochvíl (KAM MFF UK)

1. Grafy

Definice. *Graf* je dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina *vrcholů* a E je množina neuspořádaných dvojic vrcholů. Takovým dvojicím říkáme *hrany* grafu.

Názvosloví je zvoleno názorně, grafy totiž rádi graficky znázorňujeme neboli kreslíme v rovině. Vrcholy jako body, hrany jako křivky. Hrana u, v je nakreslena tak, aby ji znázorňující křivka začínala v bodě odpovídajícím vrcholu u, končila v bodě odpovídajícím vrcholu v a žádným jiným vrcholem (přesněji jeho nakreslením) neprocházela. Na obrázku jsou tři různá nakreslení téhož grafu – úplného grafu o čtyřech vrcholech.

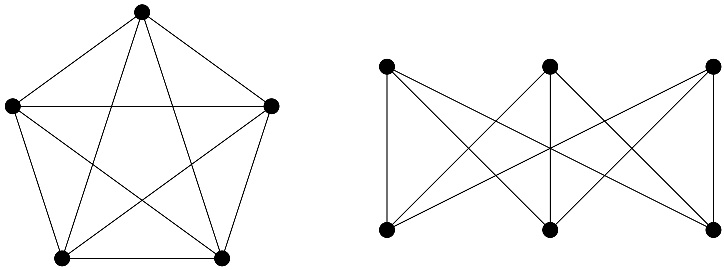


2. Rovinné grafy

Definice. Graf se nazývá *rovinný*, pokud je možno jej nakreslit v rovině tak, že žádné dvě hrany se nekříží.

Ne každé nakreslení rovinného grafu musí tuto podmínku splňovat, jak ukazuje obrázek nahoře. Úplný graf na čtyřech vrcholech je rovinný, jak dokazuje nakreslení úplně vpravo, ale nakreslení vlevo a uprostřed obsahují křížící se hrany.

Slavná věta pojmenovaná po polském matematiku Kuratowském říká, že graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje ani úplný graf na pěti vrcholech, ani úplný bipartitní graf na 3+3 vrcholech jako topologický podgraf (to znamená že hrany podgrafu jsou nahrazeny cestami). Tyto dva Kuratowského grafy vidíte na druhém obrázku.



Definice. *Stěny* konkrétního nekřížícího se nakreslení rovinného grafu jsou oblasti roviny, které by vznikly, kdybychom rovinu rozstříhali podle nakreslení hran.

Definice. Graf se nazývá *triangulace*, pokud existuje takové jeho nakreslení, ve kterém jsou všechny stěny ohraničeny třemi hranami (kombinatorickými trojúhelníky), včetně té vnější.

Do triangulace již nelze přidat žádnou novou hranu, aby graf zůstal rovinný. Tedy triangulace jsou maximální rovinné grafy na daném počtu vrcholů. Má-li triangulace n vrcholů, pak má vždy přesně $3n-6$ hran a každé nekřížící se nakreslení má $2n-4$ stěn. Úplný graf na čtyřech vrcholech je triangulace.

3. Barevnost rovinných grafů

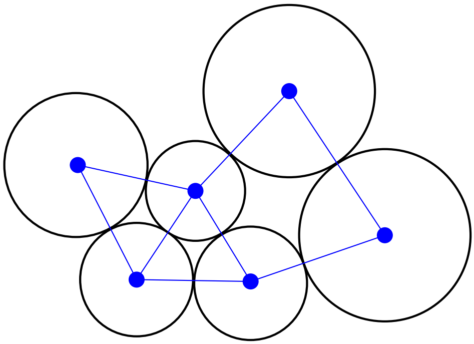
Definice. *Barevnost* grafu G, značená $\chi(G)$, je nejmenší počet barev, kterými lze obarvit vrcholy grafu G tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou nebyly obarveny stejnou barvou. Formálně definováno je to nejmenší přirozené číslo k takové, že existuje zobrazení $f\colon V \to \{1, ..., k\}$, pro něž $f(u) \neq f(v)$, kdykoliv $\{u, v\} \in E$.

Slavný **problém čtyř barev** formulovaný poprvé F. Guthriem v roce 1852 říká, že barevnost libovolného rovinného grafu je nejvýše 4. Po řadě chybných pokusů byla tato hypotéza dokázána v roce 1975 Applem a Hakenem, kteří podali první zpočátku kontroverzní důkaz pomocí počítače. Druhý, opět počítačový, ale dnes obecně uznávaný důkaz podali Robertson, Sanders, Seymour a Thomas v roce 1997.

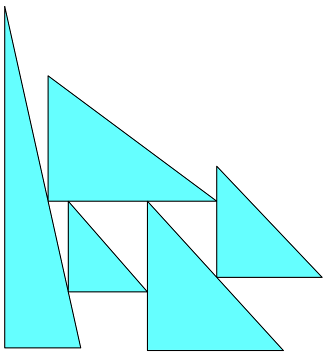
Slabší tvrzení, totiž že 5 barev stačí k obarvení libovolného rovinného grafu, bylo dokázáno Heawoodem již v roce 1890. Jednodušší důkaz matematickou indukcí, který si ukážeme, předložil C. Thomassen v roce 1994.

4. Dotykové reprezentace

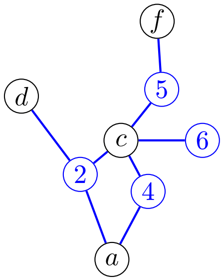
Rovinné grafy mají různé zajímavé reprezentace pomocí geometrických útvarů v rovině. Nejstarší a nejznámější je tzv. „coin representation“ dokázaná Koebem v roce 1930. Každý rovinný graf má reprezentaci, v níž vrcholy jsou reprezentovány disjunktními kruhy, z nichž libovolné dva se dotýkají právě tehdy, když odpovídající vrcholy jsou spojené hranou – jak ukazuje obrázek. Důkaz této věty je značně netriviální a používá poznatky matematické analýzy.

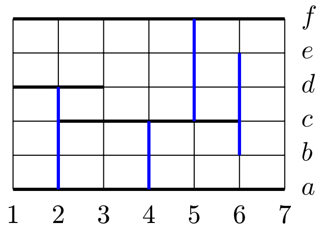


Francouzští matematici H. de Fraysseix a P. Ossona de Mendez ukázali, že každý rovinný graf má podobnou reprezentaci pomocí trojúhelníků. Návod, jak takovou reprezentaci sestrojit, si ukážeme.



Titíž pánové ještě spolu s J. Pachem ukázali, jak rovinné grafy barevnosti 2 reprezentovat jako dotykové grafy vodorovných a svislých úseček. I na sestrojení takové reprezentace si ukážeme návod.





5. Pár problémů na závěr

Povídání o rovinných grafech zakončíme dvěma otevřenými problémy, jejichž řešení zatím nikdo nezná. Oba se týkají *průnikových reprezentací* úsečkami, tj. reprezentací, kdy každému vrcholu grafu přiřadíme úsečku v rovině tak, aby úsečky přiřazené vrcholům spojeným hranou měly neprázdný průnik, zatímco dvojice vrcholů nespojených hranou byly disjunktní.

V roce 2009 Goncalves a Chalopin ukázali, že každý rovinný graf má takovou reprezentaci. Již dříve ale Scheinermann vyslovil následující otázku.

Problém 1. Má každý rovinný graf průnikovou reprezentaci pomocí úseček rovnoběžných s jedním z pevné čtveřice směrů v rovině, přičemž každé dvě rovnoběžné úsečky jsou disjunktní?

Jednoduchý důkaz takového tvrzení je nepravděpodobný, neboť by současně dokazoval větu o čtyřech barvách. Pokud ale tvrzení neplatí, možná se zrovna vám podaří najít protipříklad.

Definice. *Doplněk* grafu $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, \{\{x, y\} : x \neq y,\ \{x, y\} \notin E\})$ se stejnou množinou vrcholů, ale množinou hran tvořící doplněk do množiny hran úplného grafu.

Problém 2. Má doplněk libovolného rovinného grafu průnikovou reprezentaci pomocí úseček v rovině?