Rekurentní posloupnosti

MARTIN „*i*-TÝ" SÝKORA

ABSTRAKT. Chcete vědět, kolik králíků budete mít za deset let? Odpověď na tuto otázku a mnoho dalších lze získat pomocí rekurentních posloupností, tedy posloupností, u nichž známe prvních pár členů a způsob, jak následující členy spočítat z předchozích. Příspěvek shrnuje základní způsob, jak přejít od rekurentního zadání k explicitnímu, které je mnohdy výhodnější, a předkládá příklady k procvičení.

Jak se dozvíte na přednášce *Fibonacciho čísla*, spousta problémů (včetně množení králíků) vede na *Fibonacciho posloupnost* F_n, která je zadána rekurentně vztahy $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Takto zadaná posloupnost je sice jednoznačně určena, ale spočítat hodnotu F_{2016} je spíš trest než úloha. Na přednášce si ukážeme, jak lze přejít k explicitnímu vyjádření a jak řešit některé úlohy spojené – někdy poněkud překvapivě – s rekurentními posloupnostmi.

Homogenní lineární diferenční rovnice (s konstantními členy)

Začneme zlehka – řešením téměř nejjednoduššího případu, pod který spadá i Fibonacciho posloupnost, a následně se pokusíme uvedený aparát zobecnit. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že rekurentní vztah obsahuje pouze „dva předchozí členy", u nichž jsou konstantní koeficienty, a neobsahuje člen nezávislý na hodnotách posloupnosti, tedy například $2n + 1$. Pak je posloupnost dána tzv. *homogenní lineární diferenční rovnicí druhého stupně*.

Definice. Homogenní diferenční rovnicí druhého stupně s konstantními členy rozumíme rovnici

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost x_n a p a $q \neq 0$ jsou daná čísla.

Uvažme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0,$$

kterou formálně dostaneme z rovnice (1) tak, že nahradíme dolní index $n + k$ exponentem k.[1] Označme λ_1, λ_2 její dva komplexní kořeny.

[1] Této rovnici říkáme *charakteristická rovnice* rovnice (1).

Nejprve uvažme $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak snadno nahlédneme, že posloupnosti $x_n^1 = \lambda_1^n$ a $x_n^2 = \lambda_2^n$ jsou řešeními rovnice (1). Z linearity rovnice (1) přitom plyne, že libovolná posloupnost ve tvaru $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_1^n$, kde a, b jsou libovolné konstanty, je řešením rovnice (1). Stačí tedy volit vhodná a, b, aby byly splněny počáteční podmínky, a tím nalezneme explicitní vyjádření rekurentně zadané posloupnosti.

Pokud $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, lze ukázat, že posloupnost λ^n i posloupnost $n\lambda^n$ je řešením rovnice (1). Explicitní vyjádření rekurentní posloupnosti pak budeme hledat ve tvaru $x_n = (a + nb)\lambda^n$.

Pokud členy posloupnosti závisí na více předchozích členech, je situace obdobná: Od homogenní diferenční rovnice k-tého stupně

$$x_{n+k} = p_{k-1}x_{n+k-1} + p_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + p_0x_n, \tag{2}$$

$p_0 \neq 0$, přejdeme k charakteristické rovnici a označíme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ všechny její kořeny. Pokud je λ_i (nenulový) kořen s násobností n_i, pak je posloupnost $x_n^{i,j} = n^j\lambda_i^n$ pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$ řešením rovnice (2). Hledané řešení opět nalezneme jako tzv. *lineární kombinace* výše uvedených posloupností.

A co když rovnice homogenní není?

V případě, že rekurentní formule obsahuje i nějaký výraz v n, např. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$, je situace složitější. Obecně řešíme nehomogenní rovnici

$$x_{n+k} - p_{k-1}x_{n+k-1} - p_{k-2}x_{n+k-2} - \cdots - p_0x_n = f(n), \tag{3}$$

kde $p_0 \neq 0$ a $f(n)$ je nějaká funkce definovaná na $\mathbb{N}_0$. Při řešení nám velice pomůže následující lemma.

Lemma. *Nechť p_n je jedno, tzv. partikulární , řešení rovnice* (3). *Potom posloupnost b_n je řešením* (3) *právě tehdy, když $b_n = p_n + a_n$, kde a_n je nějaké řešení* (2).

Abychom tedy vyřešili nehomogenní rovnici, stačí, abychom nalezli jedno její partikulární řešení. To je obecně velice těžké. Ukážeme si ale, jak jej najít, pokud je pravá strana ve tvaru $f(n) = \lambda^n P(n)$, kde λ je nějaké nenulové komplexní číslo a P polynom. Pokud označíme l násobnost λ jakožto kořene P,[2] pak existuje partikulární řešení rovnice (3) ve tvaru $p_n = \lambda^n n^l Q(n)$, kde Q je polynom stejného stupně jako P.

[2] Pokud λ není kořenem P, pokládáme $l = 0$.

A k čemu to je dobré?

Příklad 1. Kolika způsoby lze přeskládat Hanojskou věž výšky n na vedlejší stojan?

Příklad 2. Na kolik nejvíce kusů můžeme rozkrájet (rovinnou) pizzu n rovnými řezy?

Příklad 3. Zmatený vlastizrádce se motá po přímce. Začíná v bodě 0 a každým krokem se s 50% pravděpodobností posune o $+1$ a s 50% pravděpodobností o -1. Protiteroristické komando přitom umístilo do bodu 2016 minu. S jakou pravděpodobností vlastizrádce přežije?

Příklad 4. Tajná policie zatkla dva dělitele X a Y, a že byla štědrá, dala jim po řadě x a y mincí. Dělitelé si mají házet mincí (každý má pravděpodobnost výhry 50%) a kdo prohraje, dá jednu svou minci druhému. Komu dojdou peníze, bude popraven, zatímco druhý propuštěn. Jaká je pravděpodobnost, že přežije dělitel X? A co když má dělitel X v každém hodu obecnou pravděpodobnost výhry p?

Příklad 5. Nalezněte explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti a_n, která splňuje rekurentní vztah $a_{n+1} - 3a_n = 2$ a počáteční podmínku $a_1 = 2$.

Příklad 6. Kolika se rovná $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$?

Příklad 7. Kolika se rovná $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$?

Příklad 8. (Fibonacciho posloupnost) Najděte F_n, pokud $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Příklad 9. Ukažte, že existuje jediná posloupnost a_n kladných čísel splňující $a_0 = 1$ a $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$.

Příklad 10. Najděte n-tý člen posloupnosti definované vztahy

$$a_1 = \cos(\varphi), \quad a_2 = \cos(2\varphi) \quad \text{a} \quad a_{n+2} = 2\cos(\varphi)a_{n+1} - a_n.$$

Další příklady

Příklad 11. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$. Ukažte, že a_{2016} není dělitelné čtyřmi.

Příklad 12. Pro přirozené číslo k označme $C(k)$ jeho ciferný součet (v desítkové soustavě). Dokažte, že pro každé přirozené číslo k je posloupnost $a_0 = k$, $a_{n+1} = C(a_n)$ od nějakého členu konstantní. Najděte tuto konstantu pro $k = 2016^{2017}$.

Příklad 13. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $2^k \mid a_n$ právě tehdy, když $2^k \mid n$.

Příklad 14. $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$ $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$. Nalezněte a_{2016}.

Příklad 15. Pro posloupnost $a_0, a_1, a_1, \ldots$ platí, že pro všechna nezáporná $m \geq n$ máme $a_{m+n} + a_{m-n} = (a_{2m} + a_{2n})/2$. Pokud $a_1 = 1$, kolik je a_{2016}?

Příklad 16. Nechť $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$. Ukažte, že pokud p je prvočíslo, pak p dělí a_p.

Příklad 17. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = (a_{n+1}^2 + 2)/a_n$. Ukažte, že všechna a_i jsou celá čísla.

Příklad 18. Buď P polynom s celočíselnými koeficienty. Vytvořme posloupnost $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro všechna $k, m \in \mathbb{N}$ platí $a_{(k,m)} = (a_k, a_m)$, kde (p, q) označuje největší společný dělitel čísel p, q.

Příklad 19. Je dáno reálné číslo a a posloupnost x_n splňující $x_0 = a$ a $x_{n+1} = 2a - (a^2 + 1)/x_n$. Dokažte, že pokud je tato posloupnost periodická, má její nejkratší perioda lichou délku. (*i*KS, 3. ročník, A1)

Příklad 20. Nechť A a E jsou protilehlé vrcholy osmiúhelníka. Policista skáče z bodu A do bodu E, kde dělitel čeká na zatčení, přičemž v každém skoku se posune na sousední vrchol. Označme a_n počet různých cest délky n, které mohl zvolit. Dokažte, že $a_{2n-1} = 0$ a

$$a_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{2}))^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

(IMO 1979)

Literatura a zdroje

[1] Miško Szabados: *Rekurentné Postupnosti*, Oldřichov, 2009.
[2] Katka Quittnerová: *Rekurentné Postupnosti*, Horní Bradlo, 2004.
[3] Saša Kazda: *Rekurentní Rovnice*, Janova Bouda, 2005.
[4] Z. Masáková: *Diskrétní matematika II*, *http://people.fjfi.cvut.cz/masakzuz/dim_soubory/dim2.pdf*