# Rekurentní rovnice

*Saša Kazda*

Pojďme si povídat o rekurentních rovnicích. Pokud jsi loni pilně řešil seriál, možná si vzpomínáš na příklady o množení medvědů, kde počet nově narozených medvědů v nějakém roce závisel na počtu v roce předešlém. Ukazuje se, že diferenční rovnice (což znamená v podstatě totéž co rekurentní rovnice) nejsou dobré pouze k počítání medvědů (či králíků, jak to činil pan Fibonacci), ale využijí se všude, kde je možné napsat nějaké závislosti mezi sousedními prvky velkého systému.

**Příklad.** Mějme dva hazardní hráče, X a Y, kteří si házejí mincí. Pravděpodobnost, že dané kolo vyhraje X i Y je stejná (rovná 50%). Kdo prohraje, dá poraženému korunu. Na začátku má hráč X v kapse $x$ korun Y potom $y$ korun. Hraje se, dokud jeden z hráčů nezbankrotuje. Jaká je pravděpodobnost, že X zbankrotuje?

Řešení příkladu si necháme na přednášku, tady se zmíníme o souvislostech s rekurentními formulemi. Zafixujme si celkový počet korun ve hře a označme si $z_i$ pravděpodobnost, že X zbankrotuje, pokud má $i$ korun a jeho protivník $x+y-i$ korun. Nás samozřejmě zajímá číslo $z_x$. Zjevně platí $z_0 = 1$ (když X nic nemá, prohrál) a $z_{x+y} = 0$ (tady prohrál Y).

S trochou selského rozumu (a teorie pravděpodobnosti) si pak uvědomíme, že pro $i \in \{1, 2, \ldots, x+y-1\}$ platí vztah:

$$x_i = \frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_{i+1}.$$

Tím jsme dostali krásný exemplář rekurentní rovnice, který potřebujeme vyřešit.

## Krotké rekurentní rovnice

Další úvahy bude výhodně dělat v komplexních číslech. Pokud ses s množinou $\mathbb{C}$ zatím příliš nekamarádil, nemusíš se bát, většina zde vykládaných věcí platí beze změny i v $\mathbb{R}$ téměř stejně (viz příklady). Jenom holt nemáme zaručeno, že všechny polynomy mají kořeny.

**Definice.** *Homogenní lineární rekurentní rovnice řádu $k$ s konstantními koeficienty se nazývá rovnice*

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + c_0 a_n = 0 \tag{1}$$

*pro čísla $a_i \in \mathbb{C}$. Přitom $c_k \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ (to jsou ony konstantní koeficienty). Obvykle $i \in \mathbb{N}$ (výjimečně můžeš narazit na $i \in \mathbb{Z}$).*

Řešením rekurentní rovnice je tedy každá posloupnost $a_i$, jejíž členy splňují vztah (1) pro všechna $i \in \mathbb{N}$.

Všimni si, že rovnice samotná nám zdaleka neurčuje své řešení jednoznačně. Potřebujeme mít ještě určeno nějakých $n$ z čísel $a_i$ . Na druhou stranu, pokud máme určeno třeba prvních $n$ čísel, máme jednoznačně definovanou celou posloupnost: Číslo $a_{n+1}$ můžeme spočítat z hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, číslo $a_{n+2}$ pak z hodnot $a_{n+1}, a_n, \ldots, a_2$ a tak dále. Těmto „dodatečným parametrům rovnice“ se říká počáteční podmínky – když máme dáno, jak to vypadá na „okraji“, umíme to spočítat všude.

Proč se těmto rovnicím říká lineární? Protože neobsahují $a_i$ ve vyšších mocninách nebo uvnitř funkcí. To má ten hezký důsledek, že součet $c_i = a_i + b_i$ dvou řešení je také řešením a vynásobením všech prvků řešení konstantou $d_i = \alpha \cdot a_i$ dostaneme další řešení. Pro pokročilé: Množina všech řešení lineární rekurentní rovnice řádu $k$ se chová jako vektorový prostor dimenze $k$.

**Příklady.**

(i) $a_{n+1} - 2a_n = 0$ popisuje exponenciální růst $a_n = A \cdot 2^n$, kde $A \in \mathbb{C}$.

(ii) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ popisuje drobně upravený exponenciální růst (zkus si ji vyřešit).

(iii) A konečně slavná Fibonacciho čísla jsou určena rekurentní rovnicí $F_{n+2} - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$, počáteční podmínkou $F_1 = F_2 = 1$ a více se o nich dozvíš na samostatné přednášce.

Co se s takovou rekurentní rovnicí dá dělat? Zapomeňme na chvíli na okrajové podmínky a zkusme hledat řešení ve tvaru $a_n = \lambda^n$.

Má být:

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + c_0 a_n = 0$$
$$c_k \lambda^{n+k} + c_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \cdots + c_0 \lambda^n = 0$$

Pro $\lambda \neq 0$ to je ekvivalentní s rovnicí:

$$c_k \lambda^k + c_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + c_0 = 0 \tag{2}$$

Polynomu na levé straně říkáme charakteristický polynom soustavy. Vidíme, že pro $\lambda \neq 0$ je $a_n = \lambda^n$ řešením rovnice (1), právě když $\lambda$ je řešením polynomu (2). To je nadějné.

Co když je nula řešením charakteristického polynomu? Potom lze snadno nahlédnout, že $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = 0$ je řešením rekurentní rovnice.

Pokud má rekurentní rovnice pouze jednoduché kořeny, vyhráli jsme – lze dokázat, že z těchto nalezených řešení (učeně se jim říká *fundamentální systém*) lze právě jedním způsobem pomocí lineárních kombinací poskládat každé jiné řešení.

**Příklad.** Mějme rovnici $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$. Charakteristický polynom má kořeny 3 a 2, obecné řešení rovnice tedy musí vypadat jako $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$,

kde $A, B \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla. Pokud máme počáteční podmínku $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, vyřešíme soustavu rovnic:

$$A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = 0$$
$$A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 1$$

a dostaneme $A = -1, B = 1$.

### Divočejší rekurentní rovnice

Co když má charakteristický polynom násobné kořeny? I potom dokážeme najít fundamentální systém.

Nechť $\lambda \neq 0$ je $m$-násobný kořen (2). Potom posloupnosti $\{\lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n \cdot \lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\ldots$ ,$\{n^{m-1} \cdot \lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou řešeními (1). Pro $\lambda = 0$ je to ještě jednodušší: Řešení pak vypadají jako posloupnosti samých nul s jedinou jedničkou na $j$-tém místě, $0 < j < m$.

Opět lze dokázat, že pomocí lineárních kombinací lze z těchto řešení (z tohoto fundamentálního systému) dostat každé řešení (1) právě jedním způsobem.

**Cvičení.** Zkus vyřešit úlohu z úvodu pro obecnou pravděpodobnost $p$ výhry hráče X (hráč Y má potom pravděpodobnost výhry $1 - p$).

### Nehomogenní rekurentní rovnice

Co když budeme potřebovat vyřešit rovnici:

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + c_0 a_n = f(n), \tag{3}$$

kde $f(n)$ je obecná funkce?

Řekněme si rovnou, že obecně takovou rovnici řešit neumíme. Funkce $f(n)$ totiž může být všelijaká nepříjemná. Přesto se často dokážeme s těmito rovnicemi vypořádat. Chce to jenom trochu štěstí a hlavně nepropadat panice.

**Definice.** *Každému konkrétnímu řešení nehomogenní rekurentní rovnice pro nějaké počáteční podmínky budeme říkat partikulární řešení.*

Takové partikulární řešení lze často prostě uhádnout – zvolíme si nějaké hezké počáteční podmínky a zjistíme, jak vypadá $n$-tý člen.

**Pozorování.** Nechť $a_i, b_i$ jsou partikulární řešení rovnice $\sum_{j=0}^{k} c_j a_{n+j} = f(n)$. Potom posloupnost $c_i = a_i - b_i$ řeší odpovídající homogenní rovnici $\sum_{j=}^{k} c_j a_{n+j} = 0$.

**Důsledek.** Pokud známe partikulární řešení nehomogenní rovnice a vyřešíme odpovídající homogenní rovnici, tak obecné řešení nehomogenní rovnice lze psát jako součet partikulárního řešení a řešení homogenní rovnice.

**Příklady.**

(i) Čtvrtá úloha první série vedla na rekurentní rovnici $a_{i+1} = \frac{a_i+6}{2}$. Zkuste tuto rovnici vyřešit pro obecné $a_1$.

(ii) Množení králíků a hladový vlk: $K_{i+2} = K_{i+1} + K_i - 1$.

(iii) Náhodná procházka v jednom rozměru: V každém kroku se posuneme s 50% pravděpodobností buď o 1 doleva, nebo doprava. Startujeme z bodu 0. Jaká je pravděpodobnost, že po mnoha (nekonečně mnoha) krocích navštívíme bod 2005?

(iv) Zkuste totéž ve dvou rozměrech (v každém kroku jdeme buď nahoru, dolu, doleva, nebo doprava).