Rekurentné postupnosti

Katka Quittnerová

Úvod

Veľa z Vás sa už asi mnohokrát stretlo s tzv. *Fibonacciho postupnosťou*, t.j. postupnosťou čísel 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... definovanou vzťahmi

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Možno Vás niekedy napadlo, či by z tohto *rekurentného* predpisu bolo možné odvodiť *explicitný* predpis, t.j. nejaký priamy vzorček pre n-té Fibonacciho číslo. Možné to je, tento vzorček sa nazýva *Binetova formula* a možno ho zapísať napr. v tvare

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Ak neveríte, ako by niečo tak „škaredého“ mohlo byť už len celočíselné pre každé n, skúste si dosadiť $n = 0, 1, 2, \ldots$ Tento explicitný vzorček nie je len hračka, môžeme sa pomocou neho o postupnosti F_n veľa dozvedieť, najmä ako rýchlo rastie. Na prednáške si ukážeme metódu, ako takéto (občas výjdu aj krajšie, nebojte sa `:-)`) vzorčeky v obdobných úlohách odvodiť. V druhej časti budeme hlavne počítať rôzne príklady na rekurentné postupnosti, ktoré s prvou časťou nebudú často vôbec súvisieť.

Homogénne lineárne diferenčné rovnice

Definícia. *Homogénnou lineárnou diferenčnou rovnicou stupňa 2 (s konštantnými koeficientami) rozumieme rovnicu tvaru*

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \quad (q \neq 0), \tag{1}$$

kde neznámou je postupnosť a_n a p, q sú nejaké pevné čísla.

Budeme hľadať všeobecné riešenia rovnice (1), t.j. všetky postupnosti komplexných čísel (ak ale kompexné čísla nepoznáš, vôbec to nevadí) $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, ktoré splňujú (1). Pokúsme sa nájsť riešenie (1) v tvare $x_n = \lambda^n$ – po dosadení do rovnice (1) dostaneme $\lambda^{n+2} = p\lambda^{n+1} + q\lambda^n$, $\lambda^2 = p\lambda + q$, alebo

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0.$$

Toto je *charakteristická rovnica* rovnice (1). Pre jej korene λ_1 a λ_2 dostávame riešenia rovnice (1): $x_n = \lambda_1^n$ a $x_n' = \lambda_2^n$. Uvedomíme si, že ak máme nejaké riešenie $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ rovnice (1), potom každý jeho násobok je znovu riešením a tiež sčítaním dvoch riešení dostaneme opäť riešenie (inými slovami, riešenia (1) tvoria lineárny priestor). Ak

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, dostávame všeobecné riešenie (1) ako

$$x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n,$$

kde a, b sú ľubovoľné konštanty (ukážeme si, prečo už žiadne ďalšie riešenia (1) neexistujú). Ak poznáme počiatočné hodnoty x_0, x_1, hodnoty a, b z nich jednoznačne dopočítame a máme hľadaný vzorček pre našu postupnosť. V prípade $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ si ukážeme, že aj $x_n = n\lambda$ je riešením (1) a všeobecné riešenie má tvar

$$x_n = (a + bn)\lambda^n.$$

Príklad. Nájdite všetky riešenia rovnice $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

Poznámka. Podobne sa dá postupovať pri rovniciach rádu k: pre rovnicu

$$a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + p_0 a_n, \quad p_0 \neq 0, \tag{2}$$

spočítame korene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jej charakteristického polynómu $\lambda^k - p_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - p_1\lambda - p_0$. Ak sú tieto korene po dvoch rôzne, všeobecné riešenie dostaneme ako lineárnu kombináciu riešení $x_n^1 = \lambda_1^n$, $x_n^2 = \lambda_2^n$, ... , $x_n^k = \lambda_k^n$. Ak je nejaký koreň λ l-násobný, dá sa ukázať, že $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{l-1}\lambda^n$ sú riešenia (2), čím dostávame dokopy opäť k (nezávislých) riešení generujúcich všetky riešenia.

Nehomogénne lineárne diferenčné rovnice

Ak v našej rekurentnej rovnici vystupuje okrem násobkov a_n aj niečo iné, t.j. naša rovnica má tvar

$$a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n = f(n), \quad q \neq 0,$$

obecne

$$a_{n+k} - p_{k-1}a_{n+k-1} - p_{k-2}a_{n+k-2} - \ldots - p_0 a_n = f(n), \quad p_0 \neq 0, \tag{3}$$

kde $f(n)$ je nejaká pevná funkcia definovaná na $\mathbb{N}_0$, situácia je o niečo zložitejšia.

Pozorovanie. Nech p_n je jedno (tzv. partikulárne) riešenie rovnice (3). Potom rovnicu (3) riešia práve tie postupnosti b_n, ktoré majú tvar $b_n = p_n + a_n$, kde a_n je riešenie rovnice (2).

Pre vyriešenie nehomogénnej rovnice nám teda stačí nájsť jedno jej riešenie (často ho proste uhádneme) a potom použiť poznatky, ktoré sme získali o homogénnych rovniciach. Nájsť partikulárne riešenie sa nám v obecnosti nepodarí, ukážeme si však, ako ho hľadať v prípade, že pravá strana $f(n) = \lambda^n P(n)$, kde $P(n)$ je polynóm a λ nenulové komplexné číslo. Ak je totiž l násobnosť λ ako koreňa charakteristického polynómu ($l = 0$ ak $P(\lambda) \neq 0$), potom existuje (práve jedno) riešenie rovnice (3)

v tvare $p_n = \lambda^n n^l Q(n)$, kde $Q(n)$ je polynóm. Pritom platí, že stupeň polynómu Q je rovnaký ako stupeň polynómu P.

Fibonacciho čísla

Fibonacciho postupnosť (F_n) má veľa zaujímavých vlastností. Tu sú niektoré z nich, dajú sa väčšinou dokázať indukciou (v čísle 3 treba vedieť, ako sa násobia matice, to si ukážeme na prednáške – táto vlastnosť ale dosť zjednodušuje dôkazy ďalších).

1. $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots$
2. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$
4. $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$
5. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
6. $F_! + F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2}, \quad 1 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}$
7. $F_n F_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1} = F_{2n-1}, \quad F_{n+1}F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n$
8. $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}, \quad F_n^2 + 2F_{n-1}F_n = F_{2n}, \quad F_n\,(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{2n}$
9. $F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$
10. $F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$
11. $m|n \Rightarrow F_m|F_n$
12. $\mathrm{nsd}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{nsd}(m,n)}$

Príklady

Príklad 1. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1$, $(n \geq 1)$. Ukážte, že a_{2004} nie je deliteľné 4.

Príklad 2. $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$, $(n \geq 3)$. Ukážte, že všetky a_i sú celé čísla.

Príklad 3. Ukážte, že existuje jediná postupnosť kladných čísel a_0, a_1, a_2, $\ldots$ taká, že $a_0 = 1$, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$, $n \geq 0$.

Príklad 4. Pre prirodzené číslo k nech $C(k)$ znamená jeho ciferný súčet (ak je zapísané v desiatkovej sústave). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k je nekonečná postupnosť $a_0 = k$, $a_{n+1} = C(a_n)$, $n \geq 0$, od nejakého člena konštantná. Nájdite túto konštantu pre $k = 2003^{2004}$.

Príklad 5. Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami. Vytvorme postupnosť $a_0 = 0$, $a_n = P(a_n)$ pre $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že pre všetky $k, m \in \mathbb{N}$ platí $a_{(k,m)} = (a_k, a_m)$, kde (p, q) označuje najväčší spoločný deliteľ čísel p, q.

Príklad 6. Nájdite n-tý člen postupnosti definovanej vzťahmi $a_1 = \cos\varphi$, $a_2 = \cos 2\varphi$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} \cdot \cos\varphi - a_n$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 7. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 1$. Dokážte, že $2^k | a_n \Leftrightarrow 2^k | n$.

Príklad 8. $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$. Nájdite a_{2004}.

Príklad 9. Pre postupnosť a_0, a_1, a_2, ... platí, že pre všetky nezáporné m, n $(m \geq n)$ máme $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Nájdite a_{2004}, ak $a_1 = 1$.

Príklad 10. Nech a_n je počet možností, ako pokryť obdĺžnik 2 x n dominami 2 x 1. Nájdite
(a) a_n
(b) počet symetrických a počet rôznych (aj po otočení) pokrytí.

Príklad 11. Koľkými spôsobmi možno vyplniť kváder 2 x 2 x n tehličkami 1 x 1 x 2? Dokážte, že a_{2n} je štvorec (druhá mocnina prirodzeného čísla) pre každé $n \in \mathbb{N}$.