Rekurence pro mírně pokročilé

Jakub „Roman“ Klemsa

Abstrakt. Rekurentním vztahem se dá mnoho posloupností elegantně a jednoduše popsat, problém bývá s vyčíslením hodnot. Cílem přednášky bude nahlédnout způsob řešení lineárních rekurencí. Analogické metody se dají aplikovat v teorii diferenciálních rovnic, tolik užitečné oblasti matematiky.

Definice. Homogenní lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty nazýváme rovnici

$$c_k A_{n+k} + \cdots + c_0 A_n = 0,$$

kde $c_k, c_0 \neq 0$. Řešením je každá posloupnost $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující vztah pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Způsobů řešení rekurentních vztahů existuje několik, ty nejdůležitější si ukážeme na příkladech.

Uhodnutí

Příklad. (Zahřívací) Naším úkolem je vyčíslit nejmenší nutný počet tahů na přemístění hanojské věže výšky n. Hanojská věž se skládá z n zmenšujících se disků nasazených na hrotu. K dispozici jsou dohromady tři hroty: počáteční, cílový a odkladní. Přesouvat se smí pouze jeden disk, přičemž větší disk nesmí ležet na menším.

Počet tahů označíme H_n a ze způsobu přesouvání věže vyplyne, že pro něj platí $H_n = \ldots$ Pomocí tohoto rekurentního vztahu vyjádříme několik prvních hodnot a uhodneme řešení. Jeho pravdivost dokážeme dosazením do rekurentní rovnice.

Jak uvidíme, zde metoda uhádnutí bohatě poslouží a hlavně povede rychle k výsledku. Ne vždy se ale dá hádat…

Klíčová slova. rekurentní vztahy, Hanojské věže, lineární diferenční rovnice, charakteristický polynom

Sečtení (násobků) všech n rovnic

Příklad. (Rozjezdový) Na kolik dílků rozdělíme kožešinu n různoběžnými řezy (tak, že se protínají uvnitř a jedním bodem procházejí maximálně dva)?

Opět odvodíme rekurenci $K_n = \dots$ a nyní už bude stačit všech n rovnic sečíst a provést jednoduchou algebraickou úpravu. Všimněme si, že potřebujeme znát K_0.

Podobným úkolem je zjistit počet dílů při porcování medvěda, trojrozměrného objektu, s podobnými pravidly.

Ukážeme si, že rekurence splňuje $M_n = \dots$ a podobným způsobem rekurenci vyřešíme.

Tento způsob můžeme zpětně aplikovat i na hanojské věže, avšak na některé stále nestačí.

Řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty metodou charakteristického polynomu

Začneme homogenní lineární diferenční rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty a, b, c (a, c nenulové): $aX_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = 0$. Pokud známe (nejlépe) první dvě hodnoty, dovedeme z nich celou posloupnost zkonstruovat. Pokud se budeme dívat na množinu všech řešení této rekurence[1], je tato množina uzavřená ke sčítání a násobení reálným číslem[2]. A protože je každá posloupnost jednoznačně určena dvěma čísly, stačí najít dvě nenulové posloupnosti, které splňují rekurenci, umíme je snadno vyjádřit a jedna není násobkem druhé[3]. Pomocí nich pak určitě dokážeme nakombinovat i hledanou posloupnost zadanou konkrétními počátečními podmínkami.

Ukazuje se, že hledanou posloupností je $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$: dosadíme-li ji do rekurence a vykrátíme λ^n, dostaneme tzv. charakteristický polynom, v našem případě $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

V případě, že má polynom různé kořeny, stačí nahlédnout, že dvojice $(1, \lambda_1)$ a $(1, \lambda_2)$ si nejsou násobkem. Poté již dopočteme koeficienty lineární kombinace α, β z počátečních podmínek:

$$\alpha \cdot (1, \lambda_1) + \beta \cdot (1, \lambda_2) = (X_0, X_1).$$

Řešením je pak $X_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$.

V případě, že má polynom dvojnásobný kořen, potřebujeme další vyjádřitelné lineárně nezávislé řešení, tedy další typ řešení. Tím je $\{n \cdot \lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$, kde λ je dvojnásobný kořen. Dvojice $(1, \lambda)$ a $(0, \lambda)$ si opět nejsou násobkem, můžeme z nich tedy kombinovat řešení s libovolnými počátečními podmínkami.

[1] Tzn. se všemi uspořádanými dvojicemi počátečních podmínek.

[2] Obecně se vše odehrává na komplexních číslech, pro jednoduchost uvažujeme pouze čísla reálná.

[3] Obecně nesmí být lineárně závislé.

Rovnice vyšších řádů vedou na polynomy vyššího stupně, mohou tedy být neřešitelné. Vyšší násobnosti kořenů pak přidávají další řešení zvyšováním mocniny u n až po $\{n^{k_i-1} \cdot \lambda_i^n\}_{n=0}^{\infty}$, kde λ_i je kořen násobnosti k_i.

Příklad. (Rutinní) Určete, kolika způsoby je možné utratit n pazourků, pokud každý den koupím právě jednu z věcí: pazourek (1), oštěp (2), žena (2).

Řešení. Počet kombinací označíme K_n. První den mohu koupit jednu ze tří věcí. Celkový počet kombinací tak bude tento součet:

(1) koupil jsem pazourek, zbývá mi $n-1$ pazourků, tedy K_{n-1} kombinací,
(2) koupil jsem oštěp, zbývá mi $n-2$ pazourků, tedy K_{n-2} kombinací,
(3) koupil jsem ženu, zbývá mi $n-2$ pazourků, tedy K_{n-2} kombinací.

Dostáváme se tak k rekurenci $K_n = K_{n-1} + 2K_{n-2}$, tu vyřešíme metodou charakteristického polynomu $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Kořeny jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Řešení rekurence je tedy ve tvaru $K_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n$, kde konstanty C_1, C_2 dopočteme z počátečních hodnot $K_1 = 1$, $K_2 = 3$ a dostáváme $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = \frac{1}{3}$. Výsledné řešení je $K_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice

Nehomogenní lineární diferenční rovnici začneme řešit stejně jako homogenní. K nalezení všech řešení nám už stačí najít pouze jediné řešení nehomogenní (tzv. partikulární) a sečíst ho s řešením homogenním. Obecné návody na hledání partikulárních řešení jsou známé jen pro určité typy pravých stran a je s nimi spousta práce. Ukážeme si jen zběžně metodu variace konstant.

Příklad. (Ošemetný) Při počítání středního počtu kroků binárním vyhledávacím stromem se dostaneme k rekurenci

$$B_n = 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot B_k.$$

Některé příklady jiných diferenčních rovnic

Příklad. (Pošetilý) Vyřešte rekurence

$$a_{n+2} - 3na_{n+1} + 2n(n-1)a_n = 0,$$

$$a_{n+1} = n \cdot (a_1 + \cdots + a_n).$$

Literatura a zdroje

[1] Z. Masáková: *přednášky Diskrétní matematika 2*, FJFI ČVUT, Praha, 2011