

Úvod

Snaž se jakkoli, absolutní bordel neuděláš. A o tom si budeme povídat.

Dirichletův princip

Ať už budeme dělat s oblečením ve skříni cokoli, vždy bude platit:

Tvrzení. (Dirichletův princip)

- (1) Dáme-li $n + 1$ košil na pouhých n ramínek, pak na alespoň jednom ramínku budou viset alespoň dvě košile.
- (2) Dáme-li $kn + 1$ ponožek do n přihrádek, alespoň v jedné jich bude alespoň $k + 1$.

To jsou hranice nepořádku, které nepřekročíme.

Pár grafových pojmů

Nyní budeme chtít uvedený princip trochu zevšeobecnit. Ale k tomu si musíme nejprve říct pár pojmů.

Definice. Grafem (V, E) budeme rozumět libovolnou množinu V vrcholů grafu a podmnožinu dvojice vrcholů z E . Dvojice z E budeme nazývat hrany.

Definice. Úplný graf K_n je graf, který má n vrcholů $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, jež jsou všechny spojeny hranou (tj. E je množina všech dvojic z V).

Definice. Obarvení hran grafu k barvami je nějaké zobrazení z E do $\{1, 2, \dots, k\}$

Definice. Podgrafem grafu (V, E) je graf, jehož vrcholy V' jsou některé vrcholy z V a hrany jsou všechny hrany původního grafu, které obsahovaly jen body z V' .

V předchozí kapitole jsme se dívali na jednotlivé objekty, zkusme se nyní více zaměřit na vztahy mezi nimi a vyslovit slibovanou větu o tom, že ani tady nebude bordel tak úplně libovolný.

Věta. (Ramseyova věta pro grafy) Pro každé n a r přirozené existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že při libovolném obarvení hran úplného grafu K_N pomocí r barev existuje podgraf tohoto grafu na n vrcholech K_n , jehož všechny hrany mají stejnou barvu.

Toto tvrzení lze ještě trochu zevšeobecňovat. Např. můžeme chtít, abychom našli K_{n_1} obarvený celý první barvou, či K_{n_2} obarvený druhou barvou, ...

Obecná Ramseyova věta

Zkusme nyní zkoumat vztahy nejen mezi dvojicemi, ale i mezi trojicemi, čtveřicemi, ... Tak tohle už je opravdu jen pro šílence. Nejprve si zavedeme pár pojmů.

Definice. *Mějme libovolnou množinu K a libovolné obarvení jejích n -prvkových podmnožin pomocí r barev. Podmnožinu $L \subseteq K$ nazvu homogenní při daném obarvení, pokud každá její n -prvková podmnožina je obarvena stejnou barvou.*

Je dobré si uvědomit, že nebarvíme jednotlivé prvky, ale celé množiny, takže se klidně může stát, že např. tříprvková množina $\{1, 2, 3\}$ bude obarvena žlutě a $\{2, 3, 4\}$ červeně.

Definice. *Symbol $k \rightarrow (l)_r^m$ znamená, že pokud máme množinu velikosti k a libovolné obarvení jejích podmnožin pomocí r barev, vždy najdeme homogenní podmnožinu v tomto obarvení, která má velikost alespoň l .*

Věta. (Obecná Ramseyova) *Pro každá $l, m, r \in \mathbb{N}$ platí, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k \rightarrow (l)_r^m$.*

I toto tvrzení lze stejně jako Ramseyovu větu pro grafy zevšeobecnit. Nádherným případem je $*$ -ramseyova věta.

A co na to nekonečno?

To už je podstatně zajímavější. Ne všechny Ramseyovy věty lze rozšířit i na nekonečné množiny. Tam může být nepořádek mnohem, mnohem větší.